Développements limités et applications

1 Formules de Taylor

Prérequis Fonctions de classe C^n, intégration par parties, factorielle,

1.1 Taylor reste intégrale

Théorème Si f est une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I et que a et b en sont éléments, alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Si f est une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I et que 0 et x en sont éléments, alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Exercice Démontrer la seconde formule ... par récurrence.

Exercice Démontrer que $f : x \to \ln(1+x)$ est de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$

puis que $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ puis appliquer TRI à l'ordre n.

1.2 Inégalités de Taylor-Lagrange

Prérequis valeur absolue et inégalités, intégrales et inégalités (positivité)

Théorème avec ordre Si $a \le b$ et que f est C^{n+1} sur $[a,b]$ et que $m \le f^{(n+1)}(t) \le M$ pour tout t de I alors

$$m\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \le f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \le M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Preuve dans $\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$ on encadre $m \le f^{(n+1)}(t) \le M$ et comme les bornes $a \le b$ sont en ordre croissant, l'inégalité est conservée en intégrant.

Attention : une primitive de $t \to (b-t)^n$ est ....

Théorème avec valeur absolue Si f est C^{n+1} sur I et que a et b en sont éléments et que $\left|f^{(p+1)}(t)\right| \le k$ pour tout $t \in I$ alors

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \le k\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Preuve On distingue suivant que $a \le b$ ou $b \le a$ et on applique TRI en traduisant : $|A| \le B \Longleftrightarrow$.

Exercice Montrer que pour tout $x \in [-a,a]$: $e^x \le e^a$ et en déduire que

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \le e^a \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

(Indication : $1 = e^0$) et en déduire un résultat sur les séries exponentielles.

N.B. Si $f^{(n+1)}$ est bornée sur un intervalle autour de 0, on en déduit (Taylor-Young)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

2 Développements limités

Prérequis notation $o(x^n) = x^n \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$.

2.1 D.L. usuels

Théorème Il existe des fonctions ε_i sont toutes distinctes, mais tendant vers 0 en 0 telles que :

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + x \cdot \varepsilon_1(x) \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + x^2 \cdot \varepsilon_2(x) \\
&= \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3 \varepsilon_3(x) \\
&= \cdots \\
\ln(1+x) &= x + x \cdot \varepsilon_1(x) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + x^2 \cdot \varepsilon_2(x) \\
&= +x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \cdot \varepsilon_3(x) \\
&= \cdots \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + x \cdot \varepsilon_1(x) \\
&= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + x^2 \cdot \varepsilon_2(x) \\
&= 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + x^3 \cdot \varepsilon_2(x) \\
&= \cdots \text{ et en particulier} \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2} x + x \cdot \varepsilon_1(x) \\
&= 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 + x^2 \cdot \varepsilon_2(x)
\end{aligned}$$

Preuve Les fonctions précédentes ont toutes leurs dérivées bornées autour de 0 puis d'après le N.B. précédent.

2.2 Définition

Développpment limité f a un développement limité d'ordre n en 0 si il existe une fonction ε tendant vers 0 en 0 et une fonction polynôme P de degré au plus n telles que

$$f(x) = P(x) + x^n \cdot \varepsilon(x)$$

P est appelé partie principale du D.L. et $x^n \cdot \varepsilon(x)$ le reste.
C'est ce reste qui donne l'ordre du D.L.

Ailleurs f a un développement limité d'ordre n en a si $f(a+h) = P(h) + h^n \cdot \varepsilon(h)$

Troncature On peut diminuer l'ordre d'un D.L. en factorisant dans le reste les termes au delà d'un degré :

$$\begin{aligned}
2x + x^2 + 3x^3 + x^3 \varepsilon(x) &= 2x + x^2 + x^2 [3x + x\varepsilon(x)] \\
&= 2x + x^2 + x^2 \cdot \varepsilon_2(x)
\end{aligned}$$

avec $\varepsilon_2(x) = [3x + x\varepsilon(x)] \to 0$ et on passe ainsi d'un D.L. d'ordre 3 à un ordre 2 par troncature.

Exercice Transformer cette écriture en D.L. :
$x^2 + 3x^3 - x^3 \varepsilon(x) + 2x + 2x^2 - x^4 + x^4 \varepsilon_1(x)$ avec ε et ε_1 tendant vers 0 en 0.

2.3 Opérations

Idée par troncature, chaque reste peut absorber les termes de degré plus élevés.
On trie les termes par degré croissant, et dès que l'on rencontre un reste, on y intègre ceux de degré supérieur.

Somme Il suffit de réordonner par degré croissant
$x^2 + 3x^3 - x^3\varepsilon(x) - 2x + 2x^2 - x^4 + x^4\varepsilon(x)$
$= x(........) + x^2(.............) + ...$

Produit On distribue en regroupant les termes par degré croissants
$(3 + x - 2x^2 + x^2\varepsilon(x))(1 + 2x + x^2 + x^2\varepsilon_1(x))$
$= (.............) + x(..................) + x^2(..................) + ...$

Composée **Attention** il faut que le contenu tende vers 0 et pour cela factoriser d'abord par le prépondérant.
On calculera à part les DL des X^k

Exercice Donner un DL de $\ln(1 + e^x)$ en utilisant $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ et $\ln(1 + X) = X - \frac{X^2}{2} + X^2\varepsilon_2(X)$

3 Applications

3.1 Limites

Idée : le D.L. changera les fonctions en presque polynôme. Mais il faut être en 0 pour pouvoir utiliser les D.L. usuels. D'où un travail préparatoire :

Méthode Pour déterminer une limite, on cherche , dans l'ordre :

- Forme déterminée ou non.
- FI : se ramener en 0 ($h = x - a$) ou en $+\infty$ ($X = -x$) puis
- Factoriser le prépondérant dans les ln, $\sqrt{}$, puissances, fractions (dans les exp il faudra par fois développer) puis découper la fonction. et simplifier
- Ce n'est que si la forme reste indéterminée que l'on passe au DL et on recommence.
- Quel ordre choisir pour les D.L. ? En général, on part de l'ordre 1 pour la continuité et l'ordre 2 pour la dérivabilité (et on perd un ordre en chemin).

Exercice de virtuose Limite en 4 de $\dfrac{\sqrt{x} - 2e^{x-4}}{\ln(x) - 2\ln(2)}$

3.2 Continuité, prolongement

Pour montrer qu'une fonction est continue en un point, on utilise la continuité des fonctions usuelles et ....
Les théorèmes ne s'appliquent **quand on change de formule**, on revient alors à la définition :

Défintion f est continue en a si : ....

Exercice Soit $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Défintion et théorème : prolongement par continuité Soit f non définie en a mais ayant une limite finie ℓ en ce point.
La fonction f prolongée par continuité est $\tilde{f}$ définie par : ....
Elle est continue en a !

3.3 Dérivabilité, tangente

Pour prouver la dérivabilité en un point et trouver la dérivée de la fonction, on utilise : . . . .
Là où les théorèmes ne s'appliquent pas, on revient à la définition :

Défintion f est dérivable en a si f est définie sur un intervalle autour de a (non réduit à un point) et si . . . .
La dérivée de f en ce point est $f'(a) =$. . . . .

Exercice Soit $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
Montrer que f est dérivable en 0 et calculer sa dérivée en ce point.

Théorème de prolongement C^1 Pour un prolongement en a :
Si f est continue sur $[a, b]$ et que $f'(x) \to p$ quand $x \to a$ alors f est C^1 en a et $f'(a) = p$.

Exercice Soit $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ pour $x \neq 0$.
Déterminer son prolongement par continuité en 0,
Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.puis montrer que f est de classe C^1 sur $]-1, +\infty[$

Tangente Si $f'(a) = p$, une équation de la tangente en a à la courbe de f est : . . . .
Si $f(a+h) = \alpha + \beta h + h \cdot \varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \to 0$ on a alors une tangente en a d'équation $y = \alpha + \beta(x-a)$

Exercice Soit $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ Déterminer le D.L. d'ordre 1 (en partant de l'ordre 2) de f en 0 et en déduire l'équation de la tangente à sa courbe en 0.

3.4 Asymptotes

D.L. à l'infini On se ramène en 0 souvent par $h = \frac{1}{x}$.

Caractérisation La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ si $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.
cela s'obtient naturellement avec un D.L.

Recherche On détermine successivement
- la limite de f en $\pm\infty$ si elle est infinie
- On détermine la **direction asymptotique** par la limite de $f(x)/x \to a$
- puis la limite de $f(x) - ax \to +xb$ alors on a asymptote $y = ax + b$ ou bien $f(x) - ax \to \infty$ et on a une branche parabolique de direction $y = ax$

Exercice Soit $f(x) = x^2 \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$. étudier en $+\infty$.

Position relative Elle est donnée par le signe de $f(x) - ax - b$.

Avec le D.L. à l'infini Si $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x)$
alors $f(x) - ax - b = \frac{1}{x}(c + \varepsilon(x))$ du signe de $\frac{c}{x}$ au voisinage de l'infini

Exercice Soit $f(x) = (x+1)e^{1/x}$ avec $h = \frac{1}{x}$, faites le DL d'ordre 1 (en partant de l'ordre 2 pour exp) et en déduire l'asymptote et la position relative en $+\infty$.