Espaces vectoriels

par Pierre Veuillez

1 Objectifs :

Disposer d'un lieu où les opérations $+$ et $\cdot$ se comportent bien.
Déterminer des bases (utilisation de la dimension)
Représenter les vecteurs grace à leurs coordonnées dans des bases.
Relier les coordonnées dans différentes bases grace aux matrices.

2 Espace vectoriel

2.1 Opérations

Défintion (ce que l'on peut y faire) $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoril (réel) si

Règles de calcul de la loi $+$:

- Pour tout u et v de E : $u + v \in E$ (contre exemple ?)
  Elle est une "loi de composition interne"
- Pour tout u et v de E : $u + v = v + u$ (est-ce le cas avec toutes les opérations ?)
- Il existe un élément neutre (comment le note-t-on ? peut-il y en avoir 2 ?)
- Tout élément u de E a un opposé noté $-u$. (signification ?)
- Pour tout u, v et w de E : $u + (v + w) = (u + v) + w$ (quelle est l'utilité ?).
  Elle est associative.

Règles de calcul de la loi $\cdot$

- Pour tout u de E et α de $\mathbb{R}$: $\alpha \cdot u \in E$ (contre exemple ?).
  Elle est une "loi de composition externe"
- 1 est neutre pour $\cdot$ (signifiation ? Dans $\mathbb{R}$, 1 est-il neutre pour $+$?)
- Pour tout α et β de $\mathbb{R}$ et u de E : $(\alpha \cdot \beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$.
  Elle est "pseudo-associative" (pourquoi pseudo ?)

Règles de calcul entre $+$ et $\cdot$

- Pour tout u et v de E et α de $\mathbb{R}$: $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \beta \cdot v$.
  Elle est distributive.
- Pour tout u de E et α et β de $\mathbb{R}$: $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$ (pseudo-distributive)

Conséquences (ce que l'on peut aussi y faire) A démontrer pour jouer un peu

Si $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel alors

- Pour tout u de E : $0_{\mathbb{R}} \cdot u = 0_E$ (idée : $0_{\mathbb{R}} \cdot u + 1 \cdot u =$. et donc ?)
- Pour tout α de $\mathbb{R}$: $\alpha \cdot 0_E = 0_E$
  0_E est un élément absorbant.
- Pour tout u de E : $u + u = 2 \cdot u$ (idée $1 \cdot u = u$ et donc ?)
- Pour tout u de E : $-1 \cdot u = -u$ (idée : qu'est ce que $-u$?)
- Pour tout u de E et α de $\mathbb{R}$: $\alpha \cdot u = 0 \iff$? (Idée : qu'est-ce que "simplifier par " α ?)

Mise en garde le produit et le quotient de deux vecteurs n'est pas défini dans le cadre d'un espace vectoriel.
(Il faut être dans une "algèbre").

Théorème Pour tout u non nul de E et α et β de $\mathbb{R}$: si $\alpha \cdot u = \beta \cdot u$ alors $\alpha = \beta$ (quelle est le nom de cette propriété ?)

Notation Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on dira l'espace vectoriel E au lieu de $(E, +, \cdot)$ et on notera αu au lieu de $\alpha \cdot u$.

3 Références

On n'a besoin de vérifier ces 10 règles de calculs que pour quelques références à partir desquels on pourra construire de nouveaux espaces !

Théorème Pour tout n et p entier, $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$: $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), +, \cdot)$: $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$: $(\mathbb{R}_n[X], +, \cdot)$ sont des espaces vectoriels.
que sont les opérations, l'égalité, le vecteur nul ?

Théorème (Produit cartésien) Si $(E, +\cdot)$ et $(F, +\cdot)$ sont des espaces vectoriels alors $(E \times F, +, \cdot)$.
Quels sont les éléments de $E \times F$? Comment définit on l'égalité , les opérations. ? Quel est le vecteur nul ?

Théorème (Applications) Si $(E, +, \cdot)$ et un espace vectoriel et $\mathcal{E}$ un ensemble non vide alors $(\mathcal{A}(\mathcal{E}, E), +, \cdot)$ est un espace vectoriel.
Qu'est-ce qu'une application ? Comment définit on l'égalité , les opérations. ? Quel est le vecteur nul ?

Exercice Dans $(\mathcal{A}(]0, +\infty[\,; \mathbb{R})\ , +, \cdot)$ montrer que la famille $(\ln, \exp)$ est libre.

Idée des preuves ces théorèmes viennent de la définition des opération, qui se font sur les composantes réelles.

4 Sous-espaces vectoriels.

4.1 Caractérisation

Définition $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel.
F est une sous espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$ si $F \subset E$ et si $(F, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.
Que signifie l'inclusion $F \subset E$?

LE théorème $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel (de référence, et ne s'appelant pas E en général).
F est un sous espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$ si
- $F \subset E$
- $0_E \in F$
- Pour tout u et v de F et α et β de $\mathbb{R}$ on a $\alpha u + \beta v \in F$

On dit que F est stable par combinaison linéaire.

Idée de la preuve Les lois externes $\alpha u = \alpha u + 0u \in F$ et interne : $u + v = 1u + 1v \in F$
Les autres propriétés étant vraies dans E, elles le sont dans F.

Exercice Soit $E = \{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\ /\ f - f' = 0\}$
Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel

Exercice Soit $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ et $E = \{M \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})\ /\ AM = MA\}$.
Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

4.2 Sous espace engendré

Définition Dans un espace vectoriel E, un vecteur u est combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \cdots, u_n$ de E si il existe des réels (paramètres) $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tels que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$

Exercice Montrer que $(5, 12, 13)$ est combinaison linéaire de $(1, 2, 3)$ et de $(1, 3, 2)$.

Défintion Soit E un vecteur espace vectoriel et $u_1, \cdots, u_n$ des vecteurs de E.
Le sous espace vectoriel engendré par $(u_1, \cdots, u_n)$ est $F = \{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n\ /\ \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$

On le note $F = \text{Vect}\,(u_1, \cdots, u_n)$
Quel est le travail à faire pour arriver à une telle écriture ?
Comment montrer qu'un vecteur u appartient à un tel ensemble ?

Plus rare $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs (infine) de E.
$\text{Vect}\,(u_i)_{i\in I}$ est l'ensemble des combiniasons linéaires *finies* de vecteurs de $(u_i)_{i\in I}$
Par exemple $\text{Vect}\,\left((X^i)_{i\in\mathbb{N}}\right)$ est l'ensemble des polynômes. (on n'a qu'un nombre fini de monôme dans chaque polynôme)

Exercice Ecrire les ensembles suivants sous forme de sous espace engendré, et précisez dans quel espace vectoriel.
Idée : il faut paramètrer les éléments.
$E = \left\{x \to \alpha \ln(x) + \beta \exp(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}_+^* \ / \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$
$F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \left\{\begin{array}{c} x + y + z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{array}\right.\right\}$
$H = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ P - XP' = 0\}$

Exercice Montrer que $(5, 12, 13) \in \text{Vect}\,((1, 2, 3)\ ,\ (1, 3, 2))$

L'AUTRE théorème Soit E un vecteur espace vectoriel et $u_1, \cdots, u_n$ des vecteurs de E.
Alors $\text{Vect}\,(u_1, \cdots, u_n)$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$
et donc $(\text{Vect}\,(u_1, \cdots, u_n), +, \cdot)$ est un espace vectoriel !

Idée de la preuve La combinaison de deux combianison en est encore une. Puis on applique LE théorème.

Exercice Montrer que les ensembles ci dessus sont des espaces vectoriel.

Conclusion Quand on a facilement accès à une écriture paramètrique de l'ensemble, on en déduit l'écriture $\text{Vect}\,(\cdots)$ et donc la structure d'espace vectoriel.

5 Bases

5.1 Famille génératrice

Définition Soit E un espace vectoriel et $(u_1, \cdots, u_n)$ un famille de vecteur de E.
$(u_1, \cdots, u_n)$ est génératrice de F si $F = \text{Vect}\,(u_1, \cdots, u_n)$

Conséquence $F = \text{Vect}\,(u_1, \cdots, u_n)$ alors pour tout vecteur de u de F,
il existe une écriture (des réels $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tels que) $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$

Exercice Déterminer des famille génératrices des ensembles E, F, G et H ci-dessus.

Remarques Si on ajoute des vecteurs à une famille génératrice, la famille résultante (sur-famille) est encore génératrice. (pourquoi ?)
Si on change l'ordre des vecteurs, la famille reste génératrice.

5.2 Famille libre

Définition E un espace vectoriel. Une famille $(u_1, \cdots, u_n)$ de vecteurs de E est libre si pour tous réels $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$
si $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$ **alors** $\alpha_1 = 0, \ \cdots, \alpha_n = 0$.
Oon dit aussi qu'ils sont *linéairement indépendants*

Conséquence Si $(u_1, \cdots, u_n)$ est libre et que $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n$ alors ?
Si l'écriture $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ existe, elle *est unique*.
Comment montrer qu'une famille n'est pas libre ?

Remarque Si on retire des vecteurs d'une famille libre, la famille résultante (sous-famille)est encore libre.

Exercice Montrer que les familles suivantes sont libres :
(qu'est-ce qu'un vecteur nul ?)
$((1,0,1)\ ,\ (1,1,0)\ ,(0,1,1))$
$\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\right)$
$(\ln\ ,\exp)$ dans $\mathcal{A}\left(]0,+\infty[\ ,\ \mathbb{R}\right)$
$(X^2+X+1\ ,X^2+2X+2)$

Exercice Les familles suivantes sont-elles libre ?
$((1,2)\,,(1,2))$
$((1,2,1)\ ,\ (2,1,2)\ ,\ (6,5,6))$
$(X\ ,\ X^2)$

Cas particuliers Pour un vecteur seul : (u) est libre si et seulement si ....
Pour deux vecteurs : (u,v) est libre si et seulement si ....
Une famille $(u_1,\cdots,u_m)$ de $\mathbb{R}^n$ est échelonnée si chaque vecteur possède une composante non nulle, qui était nulle dans tous les précédents.
Une telle famille est llibre : la relation de liberté se résout en cascade.

Exemple : Montrer que $((1,0,0)\,,(-1,1,0)\,,(1,0,1))$ est libre. Comment les disposer pour bien le voire ?

5.3 Base et coordonnées

Définition E un espace vectoriel.
$\mathcal{B}=(u_1,\cdots,u_n)$ est une base de E si elle est génératrice de E et libre.

Exercice Soit $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x-y+z=0\}$
Montrer que E est un espace vectoriel et en déterminer une base $\mathcal{B}$.

Traduction, coordonnées Cela signifie que $u_1,\cdots,u_n$ sont vecteurs de E et que
pour tout u de E *il existe des uniques* $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ tels que $u=\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_nu_n$.
Ce sont les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.

Notation On notera $\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(u)$ les coordonnées de u dans $\mathcal{B}$ et $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice colonne de ses coordonnées.
Comment trouver le vecteur à partir de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$?
Comment trouver les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ à partir du vecteur ?

Exercice Avec l'espace vectoriel E et la base $\mathcal{B}$ ci dessus,
déterminer le vecteur de coordonnées $(1,2)$ dans $\mathcal{B}$.
Montrer que $(1,2,1)\in E$ et déterminer ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.
Comment montrera-t-on que $\mathcal{C}=((1,2,1)\ ,\ (1,0,-1))$ est une autre base de E ?

Opérations Les opérations sur les coordonnées se font comme sur les vecteurs :
(Appellation savante : $u\to\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^n$)
$\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(\alpha u+\beta v)=\alpha\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(u)+\beta\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(v)$; $u=0\iff\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(u)=0$; Pour chaque $n-$uplet il existe un unique vecteur u de E dont ce sont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Jouer avec les définitions Démontrer les affirmation précédente.

5.4 Les bases canoniques

Théorème Dans $\mathbb{R}^n$ les vecteurs : $u_1=(1,0,\cdots,0)\,,\ u_2=(0,1,\cdots,0)\cdots,\ u_n=(0,0,\cdots,1)$ forment une base appelée base canonique de $\mathbb{R}^n$ (généralement appelée $\mathcal{B}$ dans les épreuves de concours)

Pour tout vecteur $u = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, ses coordonnées dans la base canonique sont : ....

Exercice le démontrer.

Théorème Dans $\mathbb{R}_n[X]$, la famille $(1,\ X,\ X^2, \cdots,\ X^n)$ forme une base appelée base canonique.

Pour tout poynôme $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ de $\mathbb{R}_n[X]$, ses coordonnées dans la base canonique sont : ....

Théorème Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ les matrices :

$$e_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0\cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix},\ \cdots,\ e_{1,p} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots 0 & 1 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

et ainsi de suite

$$e_{n,1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 1 & 0\cdots & 0 \end{pmatrix},\ \cdots,\ e_{n,p} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}$$

forment une base appelée base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Exercice Quelles sont les coordonnées de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$?

6 Dimension finie

Grace à la dimension, il suffit de faire le travail à moitié.

6.1 Défintion de la dimension

Défintion $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel est "de dimension finie" s'il a une famille génératrice finie.

Théorème Si $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel est "de dimension finie" il a alors une base ayant un nombre fini de vecteurs.

Méthode Soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une famille génératrice de E liée.

Il existe alors une combiniaison linéaire $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$ nulle à coefficients non tous nuls (α_n par exemple).

Alors u_n est combinaison linéaire des autres (comment ?)

Alors $(u_1, \cdots, u_{n-1})$ est encore génératrice de E, en effet :

Comme $(u_1, \cdots, u_n)$ est génératrice de E, pour tout vecteur u de E, il existe $(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ réels tels que $u = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n$

Ce qui se réécrit en combinaison linéaire de $(u_1, \cdots, u_{n-1})$ (comment ?)

Conclusion : en retirant un vecteur combiaison linéaire des autres, la famille résultante est encore génératrice.

Pour obtenir une base, il suffit alors de réitérer le procédé ; jusqu'à quand ?. (récurrence décroissante)

Exercice Soit $E = \text{Vect}\left((1,1,3)\ ,\ (1,-1,1)\ ,\ (1,0,2)\ ,\ (1,3,5)\right)$

Déterminer une base de E.

Théorème définition de la dimension (admis) Si E est de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre de vecteurs.

Le nombre de vecteurs d'une base est appelé dimension de E.

Convention Si $E = \{0\}$ (réduit au vecteur nul) alors $\dim(E) = 0$

Références $\dim(\mathbb{R}^n) = n$; $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$; $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = n \cdot p$

6.2 Théorèmes économes (admis)

Théorème négatif Si E est de dimension n alors, pour toute famille $\mathcal{L}$ libre de E et toute famille génératrice $\mathcal{G}$ de E, leur nombre de vecteurs vérifie :
$|\mathcal{L}| \leq \dim(E) \leq |\mathcal{G}|$ (pourquoi négatif ?)

Théorème affirmatif Soit E est de dimension n.
Si $\mathcal{L}$ est une famille libre de E de n vecteurs alors $\mathcal{L}$ est une base de E
Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E de n vecteurs alors $\mathcal{G}$ est une base de E.

Théorème sous espaces Si E est de dimension finie, et F est un sous espace de E, alosr F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.
De plus $F = E \Longleftrightarrow \dim(F) = \dim(E)$

Exercice Soit $\mathcal{B} = ((1,2),(2,1),(1,1))$, est-elle libre dans $\mathbb{R}^2$?
Soit $\mathcal{B} = ((1,1,1)\ ,(1,2,1))$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Exercice Soit $F = \text{Vect}((1,2),(2,1))$. Montrer que $F = \mathbb{R}^2$.

6.3 Matrice de changement de base

Définition Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $\mathcal{B}$ une base de E.
Soit $\mathcal{C} = (e_1, \cdots, e_n)$ une famille de vecteurs de E.
On note $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ la matrice des coordonnées (en colonnes) des vecteurs de $\mathcal{C}$.dans $\mathcal{B}$

Définition Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des bases de E alors $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ est appelée matrice de passage de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$.

Exemple $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C} = ((1,2),(0,1))$ autre base
La matrice de passage de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$ est $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
(Comment obtient on les coordonnées ?)

Théorème Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E et u un vecteur alors $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \cdot \text{mat}_{\mathcal{C}}(u)$.

Théorème Avec E de dimension n et $\mathcal{C}$ une famille de n vecteurs de E et $\mathcal{B}$ une basede E,
$\mathcal{C}$ est une base de E si et seulement si $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ est inversible.
Son, inverse est alors $\text{mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$.

Conséquence une matrice carrée est inversible si et seulement si ses colonnes sont libres.

Cas particulier Une matrice triangulaire est donc inversible si et seulement si aucun terme de la diagonale n'est nul.
(Dans quel cas est-elle non inversible ?)

7 Savoirs faire

Espace vectoriel Montrer que l'on a un sous espace vectoriel, un sous espace engendré.

Bases Montrer qu'une famille est libre.
Trouver une famille génératrice.
Trouver et utiliser la dimension.
Trouver les coordonnées.
Utiliser les coordonnées.