Cours Fonctions de deux variables

par Pierre Veuillez

1 Support théorique

1.1 Représentation

Plan et espace : Grâce à un repère cartésien $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan, les couples (x,y) de $\mathbb{R}^2$ peuvent être représenté par des points M de coordonnées (x,y)du plan.
Pour une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, grâce à un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ de l'espace, l'image de (x,y) sera représentée par un point d'altitude $z=f\left(x,y\right).$
L'ensemble de ces points formera une surface représentative.
Pour mieux appréhender cette surface, on pourra chercher des courbes de niveaux, des coupes verticales (comment les caractériser),ou des perspectives.

Exemple : $f\left(x,y\right)=x^2-y^2$

Courbes de niveau

Coupes x constant

Coupes y constant

Représentation fil de fer

Surface ombrée

1.2 Distance

Problèmatique : Les extrema de fonctions ne se caractérisent pas de la même façon suivant que la fonction est ou n'est pas dérivable "autour" d'eux
Si f est deux fois dérivable sur $[a, b]$ et qu'elle est extremum en $x \in]a, b[$, que peut-on dire de $f'(x)$, de $f''(x)$?
En est-il de même en a et en b ?
D'où la nécessité pour une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de définir l'alentour d'un point $A = (x, y)$, la proximité ou la distance entre points.

Définition : La distance -euclidienne- entre $A = (x, y)$ et $B = (x', y')$ est $d(A, B) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$

Propiétés : $d(A, B) = 0 \Longleftrightarrow A = B$
$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$ inégalité triangulaire.

1.3 Topologie (lieu d'utilisation des théorèmes)

Représentation : Pour représenter un ensemble donné par intersection, on hachure les parties refusées.
Pour représenter un ensemble donné par réunion, on hachure les parties acceptées.

Exercice 1 : Représenter
$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0\}$
$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 > 1 \text{ ou } x > 0\}$

Exercice 2 Méthode : $\mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x - y \leq 1\}$
On trace la frontière puis on teste à x ou y constant :
y fixé, si x est plus grand est-on encore dans l'ensemble ?

Boules : La *boule ouverte* de centre A et de rayon r est le disque sans son bord :

$$\mathring{\mathcal{B}}(A, r) = \left\{M \in \mathbb{R}^2 \ / \ d(A, M) < r\right\}$$

La *boule fermée* de centre A et de rayon r est le disque avec son bord :

$$\mathcal{B}(A, r) = \left\{M \in \mathbb{R}^2 \ / \ d(A, M) \leq r\right\}$$

Ouvert : $\mathcal{D}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ si tout point de $\mathcal{D}$ est à l'intérieur de $\mathcal{D}$.
Enoncé mathématique : pour tout point A de $\mathcal{D}$, il existe $r > 0$ tel que $\mathring{\mathcal{B}}(A, r) \subset \mathcal{D}$.
L'énoncé devra préciser si l'ensemble considéré est un ouvert ou pas.

Fermé : $\mathcal{D}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ si son complémentaire est un ouvert.
L'énoncé devra préciser si l'ensemble considéré est un fermé ou pas.

Borné : $\mathcal{D}$ est un borné dans $\mathbb{R}^2$ s'il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{D} \subset \mathring{\mathcal{B}}(O, r)$,
L'énoncé devra préciser si l'ensemble considéré est borné ou pas.

Frontière (hors programme) : Comment caractériser la frontière d'un ensemble ?

Idées générales (hors programme)
- les ensembles donnés par des inégalités strictes "continues" sont des ouverts ;
  En effet, une inégalité stricte reste vraie à proximité d'un point où elle est vérifiée (... si la condition est continue)
- Les *produits cartésiens* d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.
  Exemple : $\mathcal{D} =]0, 1[\times]0, +\infty[= \{(x, y) \ / \ x \in]0, 1[\text{ et } y \in]0, +\infty[\}$
- Une intersection finie d'ouvert est un ouvert. Une réunion quelconque d'ouvert est un ouvert
  Contre exemple : $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathring{\mathcal{B}}\left(O, \frac{1}{n}\right) = \{O\}$ est un fermé.

2 Limite et continuité

2.1 Définition

Limite : Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$.

On dit que f a pour limite ℓ en $A = (a, b) \in \mathcal{D}$ et on note $\lim_{M \to A} f(M) = \ell$ ou $f(M) \to f(A)$ quand $M \to A$ si :

$f(x, y)$ est aussi proche de ℓ que l'on veut pourvu que $M = (x, y)$ soit suffisamment proche de A..

Formalisation :
pour tout $\varepsilon > 0$ (la proximité que je veux)
il existe $\alpha > 0$ (il existe une proximité) tel que,
si $d(A, M) \leq \alpha$ (en deçà de laquelle)
alors $|\ell - f(M)| \leq \varepsilon$ (aussi proche que je veux)

Continuité : Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$.

On dit que f est continue en $A \in \mathcal{D}$ si $f(M) \to f(A)$ quand $M \to A$.

2.2 Opérations

Références : les fonctions coordonnées $(x, y) \to x$ et $(x, y) \to y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$

Opérations : Les sommes, produits quotient et composées de fonctions continues sont continues, sous les réserves habituelles :
- dénominateur non nul, pour les quotients.
- image par la première dans l'ensemble de continuité de la seconde, pour les composées.

Exercice 3 : Déterminer les ensembles de continuité de :

$f(x, y) = x + y$ est la somme de $(x, y) \to x$ et $(x, y) \to y$ continues sur $\mathbb{R}^2$
$g(x, y) = \ln(x + y)$ est la composée de f et de $\ln$.
$h(x, y) = \dfrac{x \cdot y}{x + y}$ est le quotient de $(x, y) \to x \cdot y$ et de $(x, y) \to x \cdot y$
$k(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ est la composée de $\sqrt{\ }$ et de la somme des composées $(x, y) \to x \to x^2$ et de $(x, y) \to y \to y^2$

2.3 Extremum

Théorème : f continue sur un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ alors f a un minimum et un maximum (absolu).

Le théorème ne précise pas comment le trouver !

3 Dérivées partielles

3.1 Dérivation

Définition : La dérivée partielle de $f(x,y)$ par rapport à x est la dérivée de $x \to f(x,y)$ où y est considéré comme paramètre.

Elle est notée $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ ou f'_x.

De même pour $q = \dfrac{\partial f}{\partial y} = f'_y$ où x est considéré comme un paramètre.

$r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{x^2}$ est la dérivée de $x \to \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ où y est considéré comme paramètre,

$s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{x,y}$ est la dérivée de $x \to \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ où y est considéré comme paramètre,

$s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{y,x}$ est la dérivée de $y \to \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ où x est considéré comme paramètre,

$t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2}$ est la dérivée de $y \to \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ où x est considéré comme paramètre,

$p,\ q,\ r,\ s,$ et t sont les "notations de Monge"

Méthode : pour calculer les dérivées secondes, il faut d'abord calculer la dérivée premières en (x,y) et c'est cette expression que l'on re-dérive alors.

Exercice 4 : Déterminer sur quel ensemble f est C^2 est calculer ses dérivées partielles premières et secondes, avec :

$$f(x,y) = \frac{x}{y} \qquad \text{et} \qquad f(x,y) = \frac{\ln(x+y)}{y}$$

Classe C^1 : f fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est de classe C^1 si elle est dérivable par rapport à chaque variable et si ses dérivées partielles sont continues.

Classe C^2 : f fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est de classe C^2 si elle est dérivable par rapport à chaque variable et si ses dérivées partielles sont dérivable et si les dérives partielle secondes sont continues.

Opérations : Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions de classe C^1 (resp C^2) sont de classe C^1 (resp C^2) (sous les hypothèses habituelles)

- Si $h(x,y) = g(f(x,y))$ alors $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = g'(f(x,y))\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ (comme les composées de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)
- Nouveauté : $g(x) = f(u(x), v(x))$ alors

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(u(x), v(x)) \cdot u'(x) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(x), v(x)) \cdot v'(x)$$

N.B. il faut d'abord calculer les dérivées partielles de f avant del es appliquer à $(u(x), v(x))$

Théorème (Schwarz) : Si f est de classe C^2 sur un ouvert $\mathcal{O}$ alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

en tout point de $\mathcal{O}$.

3.2 Développements limités

Théorème admis : Si f est de classe C^1 en (a,b) alors il existe une fonction ε qui tend vers 0 en $(0,0)$ telle que

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot k + \sqrt{h^2+k^2}\,\varepsilon(h,k)$$

Economie : En négligeant le reste, on écrira (notation différentielle)

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

avec $dx = h$, $dy = k$ et $df = f(a+h,b+k) - f(a,b)$ les variations de x, y et de $f(x,y)$.

Géométrie : La surface représentative de la partie principale du développement limité $(x,y) \to f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot(y-b)$ est le plan tangent à celle de f en (a,b).
Approcher les variations de f par la partie principale du développement limité, revient à approcher la surface représentative par le plan tangent.

Théorème : Si f est de classe C^2 en (a,b) alors il existe il existe une fonction ε qui tend vers 0 en $(0,0)$ telle que

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) &= f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot k \\ &\quad + h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \\ &\quad + \left(h^2+k^2\right)\varepsilon(h,k) \end{aligned}$$

4 Extrema

4.1 Extrema locaux

Définition : (a,b) est un extremum local (ou relatif) de f sur $\mathcal{D}$ s'il existe un ouvert $\mathcal{O}$ tel que (a,b) est extremum absolu sur $\mathcal{O}\cap\mathcal{D}$.

Théorème (Condition nécessaire) : Soit f de classe C^1 sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$.
Si f a un extremum local en $(a,b)\in\mathcal{O}$ **alors** $p = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$ et $q = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$

Preuve : Si f a un extremum local en (a,b), c'est aussi un extremum local pour les fonctions $(x,b)\to f(x,b)$ et $(a,y)\to f(a,y)$, sur un intervalle ouvert !

Définition : (a,b) est un point critique de f si $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$

Géométrie : Un point critique est un point en lequel le plan tangent à la surface représentative de f est horizontal.
Ce peut être un sommet, un col, ou autre chose...
Les extrema locaux sont donc à chercher parmi les point critiques (pour les fonctions C^1).

Théorème (Condition suffisante) : Soit f de classe C^2 sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$, et $(a,b)\in\mathcal{O}$.
p, q, r, s, et t notations de Monge.
Si $p=q=0$ et $rt-s^2>0$ **alors** f a un extremum relatif en (a,b).
C'est un maximum si $r<0$ (ou $t<0$) et un minimum si $r>0$ (ou $t>0$)
Si $p=q=0$ et $rt-s^2<0$ **alors** f n'a pas d'extremum relatif en (a,b).
C'est un "col" (selle de cheval)
Si $p=q=0$ et $rt-s^2=0$ **alors** on ne sait pas.

Exercice : $f(x,y) = x^2+2xy+my^2$
Déterminer, suivant la valeur de m, les points critiques et les extrema locaux de f.

4.2 Extrema absolus

Méthode : Le ou les extrema absolus seront parmi

- les extrema locaux de l'intérieur qui est un ouvert (méthode ci–dessous)
- ou parmi les extrema de la frontière (que l'on cherche en paramètrant la frontière, x fonction de y ou y fonction de x).

Exercice 5 : Déterminer les maxima de $f(x,y) = x^2 - y^2$ sur le fermé borné $\mathcal{D} = [0,1] \times [0,1]$.

Méthode générale : f étant continue, on sait qu'elle a un maximum global.

On recherche les maxima locaux sur $]0,1[\times]0,1[$ qui est un ouvert.

Puis sur les bords : $I = \{(0,y) \ / \ y \in [0,1]\}$, $J = \{(1,y) \ / \ y \in [0,1]\}$, $K = \{(x,0) \ / \ x \in [0,1]\}$ et $L = \{(x,1) \ / \ x \in [0,1]\}$.

Plus directement : On a $f(1,0) = 1$. Si $y \neq 0$ ou alors $f(x,y) < x^2 \leq 1$ et si $x < 1$ alors $f(x,y) \leq x^2 < 1$. Donc pour tout $(x,y) \neq (1,0)$ on a $f(x,y) < 1$ et $(1,0)$ est le maximum de f sur $\mathcal{D}$