

Cours Fonctions de deux variables

par Pierre Veuillez

1 Support théorique

1.1 Représentation

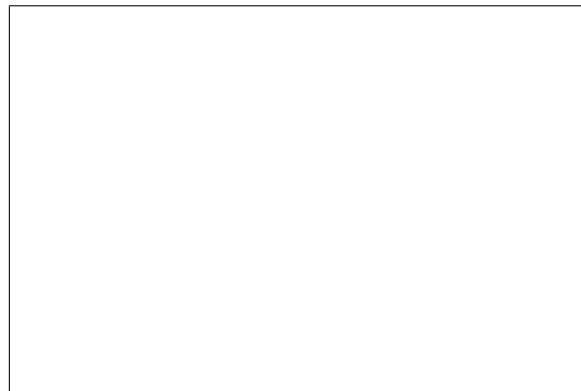
Plan et espace : Grâce à un repère cartésien (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan, les couples (x, y) de \mathbb{R}^2 peuvent être représenté par des points M de coordonnées (x, y) du plan.

Pour une fonction f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , grâce à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, l'image de (x, y) sera représentée par un point d'altitude $z = f(x, y)$.

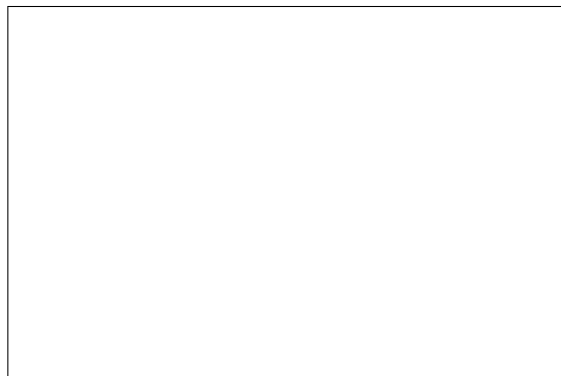
L'ensemble de ces points formera une surface représentative.

Pour mieux appréhender cette surface, on pourra chercher des courbes de niveaux, des coupes verticales (comment les caractériser), ou des perspectives.

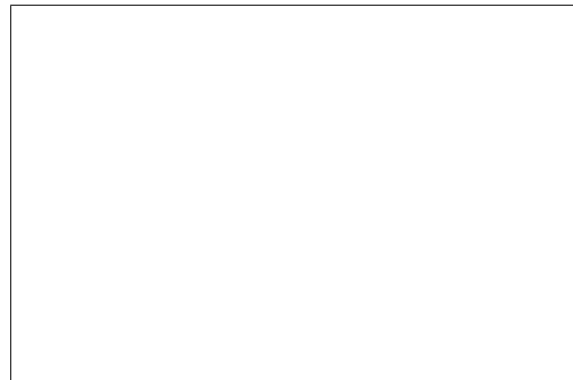
Exemple : $f(x, y) = x^2 - y^2$



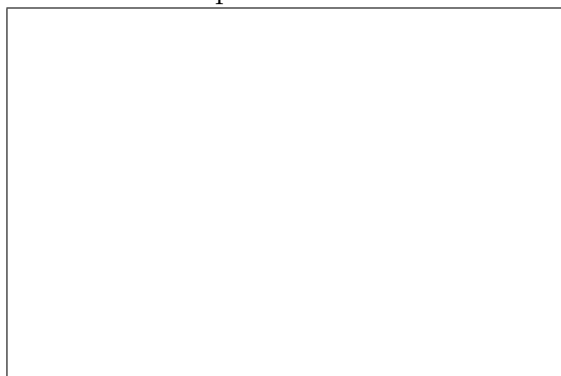
Courbes de niveau



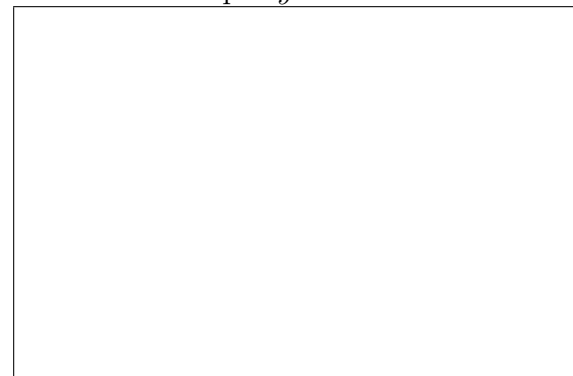
Coupes x constant



Coupes y constant



Représentation fil de fer



Surface ombrée

1.2 Distance

Problématique : Les extrema de fonctions ne se caractérisent pas de la même façon suivant que la fonction est ou n'est pas dérivable "autour" d'eux

Si f est deux fois dérivable sur $[a, b]$ et qu'elle est extremum en $x \in]a, b[$, que peut-on dire de $f'(x)$, de $f''(x)$?

En est-il de même en a et en b ?

D'où la nécessité pour une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} de définir l'alentour d'un point $A = (x, y)$, la proximité ou la distance entre points.

Définition : La distance -euclidienne- entre $A = (x, y)$ et $B = (x', y')$ est $d(A, B) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$

Propriétés : $d(A, B) = 0 \iff A = B$

$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$ inégalité triangulaire.

1.3 Topologie (lieu d'utilisation des théorèmes)

Représentation : Pour représenter un ensemble donné par intersection, on hachure les parties refusées.

Pour représenter un ensemble donné par réunion, on hachure les parties acceptées.

Exercice 1 : Représenter

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0\}$$

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 1 \text{ ou } x > 0\}$$

Exercice 2 Méthode : $\mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y \leq 1\}$

On trace la frontière puis on teste à x ou y constant :

y fixé, si x est plus grand est-on encore dans l'ensemble ?

Boules : La *boule ouverte* de centre A et de rayon r est le disque sans son bord :

$$\mathring{\mathcal{B}}(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 / d(A, M) < r\}$$

La *boule fermée* de centre A et de rayon r est le disque avec son bord :

$$\mathcal{B}(A, r) = \{M \in \mathbb{R}^2 / d(A, M) \leq r\}$$

Ouvert : \mathcal{D} est un ouvert de \mathbb{R}^2 si tout point de \mathcal{D} est à l'intérieur de \mathcal{D} .

Énoncé mathématique : pour tout point A de \mathcal{D} , il existe $r > 0$ tel que $\mathring{\mathcal{B}}(A, r) \subset \mathcal{D}$.

L'énoncé devra préciser si l'ensemble considéré est un ouvert ou pas.

Fermé : \mathcal{D} est un fermé de \mathbb{R}^2 si son complémentaire est un ouvert.

L'énoncé devra préciser si l'ensemble considéré est un fermé ou pas.

Borné : \mathcal{D} est un borné dans \mathbb{R}^2 s'il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{D} \subset \mathring{\mathcal{B}}(O, r)$,

L'énoncé devra préciser si l'ensemble considéré est borné ou pas.

Frontière (hors programme) : Comment caractériser la frontière d'un ensemble ?

Idées générales (hors programme) • les ensembles donnés par des inégalités strictes "continues" sont des ouverts ;

En effet, une inégalité stricte reste vraie à proximité d'un point où elle est vérifiée (... si la condition est continue)

- Les *produits cartésiens* d'intervalles ouverts de \mathbb{R} sont des ouverts de \mathbb{R}^2 .

Exemple : $\mathcal{D} =]0, 1[\times]0, +\infty[= \{(x, y) / x \in]0, 1[\text{ et } y \in]0, +\infty[\}$

- Une intersection finie d'ouvert est un ouvert. Une réunion quelconque d'ouvert est un ouvert
Contre exemple : $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathring{\mathcal{B}}(O, \frac{1}{n}) = \{O\}$ est un fermé.

2 Limite et continuité

2.1 Définition

Limite : Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ et $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f a pour limite ℓ en $A = (a, b) \in \mathcal{D}$ et on note $\lim_{M \rightarrow A} f(M) = \ell$ ou $f(M) \rightarrow f(A)$ quand $M \rightarrow A$ si :

$f(x, y)$ est aussi proche de ℓ que l'on veut pourvu que $M = (x, y)$ soit suffisamment proche de A .

Formalisation :

pour tout $\varepsilon > 0$ (la proximité que je veux)

il existe $\alpha > 0$ (il existe une proximité) tel que,

si $d(A, M) \leq \alpha$ (en deçà de laquelle)

alors $|\ell - f(M)| \leq \varepsilon$ (aussi proche que je veux)

Continuité : Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ et $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est continue en $A \in \mathcal{D}$ si $f(M) \rightarrow f(A)$ quand $M \rightarrow A$.

2.2 Opérations

Références : les fonctions coordonnées $(x, y) \rightarrow x$ et $(x, y) \rightarrow y$ sont continues sur \mathbb{R}^2

Opérations : Les sommes, produits quotient et composées de fonctions continues sont continues, sous les réserves habituelles :

- dénominateur non nul, pour les quotients.

- image par la première dans l'ensemble de continuité de la seconde, pour les composées.

Exercice 3 : Déterminer les ensembles de continuité de :

$f(x, y) = x + y$ est la somme de $(x, y) \rightarrow x$ et $(x, y) \rightarrow y$ continues sur \mathbb{R}^2

$g(x, y) = \ln(x + y)$ est la composée de f et de \ln .

$h(x, y) = \frac{x \cdot y}{x + y}$ est le quotient de $(x, y) \rightarrow x \cdot y$ et de $(x, y) \rightarrow x + y$

$k(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ est la composée de $\sqrt{\quad}$ et de la somme des composées $(x, y) \rightarrow x \rightarrow x^2$ et de $(x, y) \rightarrow y \rightarrow y^2$

2.3 Extremum

Théorème : f continue sur un fermé borné de \mathbb{R}^2 alors f a un minimum et un maximum (absolu).

Le théorème ne précise pas comment le trouver !

3 Dérivées partielles

3.1 Dérivation

Définition : La dérivée partielle de $f(x, y)$ par rapport à x est la dérivée de $x \rightarrow f(x, y)$ où y est considéré comme paramètre.

Elle est notée $p = \frac{\partial f}{\partial x}$ ou f'_x .

De même pour $q = \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y$ où x est considéré comme un paramètre.

$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{x^2}$ est la dérivée de $x \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ où y est considéré comme paramètre,

$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{x,y}$ est la dérivée de $x \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ où y est considéré comme paramètre,

$s = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{y,x}$ est la dérivée de $y \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ où x est considéré comme paramètre,

$t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2}$ est la dérivée de $y \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ où x est considéré comme paramètre,

$p, q, r, s,$ et t sont les "notations de Monge"

Méthode : pour calculer les dérivées secondes, il faut d'abord calculer la dérivée premières en (x, y) et c'est cette expression que l'on re-dérive alors.

Exercice 4 : Déterminer sur quel ensemble f est C^2 est calculer ses dérivées partielles premières et secondes, avec :

$$f(x, y) = \frac{x}{y} \quad \text{et} \quad f(x, y) = \frac{\ln(x+y)}{y}$$

Classe C^1 : f fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} est de classe C^1 si elle est dérivable par rapport à chaque variable et si ses dérivées partielles sont continues.

Classe C^2 : f fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} est de classe C^2 si elle est dérivable par rapport à chaque variable et si ses dérivées partielles sont dérivable et si les dérivées partielles secondes sont continues.

Opérations : Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions de classe C^1 (resp C^2) sont de classe C^1 (resp C^2) (sous les hypothèses habituelles)

- Si $h(x, y) = g(f(x, y))$ alors $\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = g'(f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ (comme les composées de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R})

- Nouveauté : $g(x) = f(u(x), v(x))$ alors

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(u(x), v(x)) \cdot u'(x) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(x), v(x)) \cdot v'(x)$$

N.B. il faut d'abord calculer les dérivées partielles de f avant de les appliquer à $(u(x), v(x))$

Théorème (Schwarz) : Si f est de classe C^2 sur un ouvert \mathcal{O} alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

en tout point de \mathcal{O} .

3.2 Développements limités

Théorème admis : Si f est de classe C^1 en (a, b) alors il existe une fonction ε qui tend vers 0 en $(0, 0)$ telle que

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot k + \sqrt{h^2 + k^2} \varepsilon(h, k)$$

Economie : En négligeant le reste, on écrira (notation différentielle)

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

avec $dx = h$, $dy = k$ et $df = f(a+h, b+k) - f(a, b)$ les variations de x , y et de $f(x, y)$.

Géométrie : La surface représentative de la partie principale du développement limité $(x, y) \rightarrow f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y-b)$ est le plan tangent à celle de f en (a, b) . Approcher les variations de f par la partie principale du développement limité, revient à approcher la surface représentative par le plan tangent.

Théorème : Si f est de classe C^2 en (a, b) alors il existe une fonction ε qui tend vers 0 en $(0, 0)$ telle que

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot k \\ &+ h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \\ &+ (h^2 + k^2) \varepsilon(h, k) \end{aligned}$$

4 Extrema

4.1 Extrema locaux

Définition : (a, b) est un extremum local (ou relatif) de f sur \mathcal{D} s'il existe un ouvert \mathcal{O} tel que (a, b) est extremum absolu sur $\mathcal{O} \cap \mathcal{D}$.

Théorème (Condition nécessaire) : Soit f de classe C^1 sur un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^2 .

Si f a un extremum local en $(a, b) \in \mathcal{O}$ alors $p = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ et $q = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$

Preuve : Si f a un extremum local en (a, b) , c'est aussi un extremum local pour les fonctions $(x, b) \rightarrow f(x, b)$ et $(a, y) \rightarrow f(a, y)$, sur un intervalle ouvert !

Définition : (a, b) est un point critique de f si $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$

Géométrie : Un point critique est un point en lequel le plan tangent à la surface représentative de f est horizontal.

Ce peut être un sommet, un col, ou autre chose...

Les extrema locaux sont donc à chercher parmi les point critiques (pour les fonctions C^1).

Théorème (Condition suffisante) : Soit f de classe C^2 sur un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^2 , et $(a, b) \in \mathcal{O}$.

$p, q, r, s,$ et t notations de Monge.

Si $p = q = 0$ et $rt - s^2 > 0$ alors f a un extremum relatif en (a, b) .

C'est un maximum si $r < 0$ (ou $t < 0$) et un minimum si $r > 0$ (ou $t > 0$)

Si $p = q = 0$ et $rt - s^2 < 0$ alors f n'a pas d'extremum relatif en (a, b) .

C'est un "col" (selle de cheval)

Si $p = q = 0$ et $rt - s^2 = 0$ alors on ne sait pas.

Exercice : $f(x, y) = x^2 + 2xy + my^2$

Déterminer, suivant la valeur de m , les points critiques et les extrema locaux de f .

4.2 Extrema absolus

Méthode : Le ou les extrema absolus seront parmi

- les extrema locaux de l'intérieur qui est un ouvert (méthode ci-dessous)
- ou parmi les extrema de la frontière (que l'on cherche en paramétrant la frontière, x fonction de y ou y fonction de x).

Exercice 5 : Déterminer les maxima de $f(x, y) = x^2 - y^2$ sur le fermé borné $\mathcal{D} = [0, 1] \times [0, 1]$.

Méthode générale : f étant continue, on sait qu'elle a un maximum global.

On recherche les maxima locaux sur $]0, 1[\times]0, 1[$ qui est un ouvert.

Puis sur les bords : $I = \{(0, y) / y \in [0, 1]\}$, $J = \{(1, y) / y \in [0, 1]\}$, $K = \{(x, 0) / x \in [0, 1]\}$ et $L = \{(x, 1) / x \in [0, 1]\}$.

Plus directement : On a $f(1, 0) = 1$. Si $y \neq 0$ ou alors $f(x, y) < x^2 \leq 1$ et si $x < 1$ alors $f(x, y) \leq x^2 < 1$. Donc pour tout $(x, y) \neq (1, 0)$ on a $f(x, y) < 1$ et $(1, 0)$ est le maximum de f sur \mathcal{D} .