Variables à densité.

1 Prérequis :

Théorème : intégrale fonction de la borne supérieure Soit $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.
Si $\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt$ converge alors F est continue sur $]-\infty, , a]$ et F est dérivable là où f est continue avec $F'(x) = f(x)$.

Convergence : Comment prouver la convergence ? cas des fonctions positives.

Calcul : Pour primitiver, il faut d'abord savoir dériver.

Fonction continue par morceaux : Comment calcule-t-on l'intégrale ?

2 De la densité à la probabiltié.

Définition de la densité : f est une densité de probabilité si
- f est définie et continue et positive ou nulle, sauf en un nombre fini de points de $\mathbb{R}$,
- et si $\int_{-\infty}^{+\infty} .f(t)\,dt$ converge et vaut 1

Exercice 1 : Montrer que f définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ est une densité.

Exercice 2 : Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que f définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ soit une densité.

Définition d'une variable à densité : Soit f une densité. X est une variable aléatoire de densité f si la fonction de répartition F de X est donnée par : pour tout x réel $F(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

Théorème : calcul de probabilités Si X a pour densité f et pour fonction de répartition F alors
- pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{P}(X = x) = 0$
- pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{P}(X \leq x) = \mathrm{P}(X < x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$
- pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{P}(X > x) = \mathrm{P}(X \geq x) = 1 - F(x) = \int_{x}^{+\infty} f(t)\,dt$
- **si** $a \leq b$ alors $\mathrm{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(t)\,dt$ et $\mathrm{P}(a \leq X \leq b) = 0$ **si** $a > b$ (idem pour des inégalités strictes ou mixtes)

Méthode : Comment calculer ces intégrales quand f est données par différentes formules suivant l'intervalle ?

Exercice 3 : Soit X ayant pour densité celle de l'exercice1, déterminer $\mathrm{P}(1 \leq X \leq 2)$, $\mathrm{P}(-1 \leq X \leq 2)$, la fonction de répartition de X.

Exercice 4 : dans les mêmes conditions, calculer, suivant la valeur de x, $\mathrm{P}(x \leq X \leq x+1)$, $\mathrm{P}(x \leq X \leq x^2)$

3 De la probabilité à la densité.

3.1 Si F est une fonction définie sur $\mathbb{R}$

Théorème : F est la fonction de répartition d'une variable à densité $\Longleftrightarrow$
- F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf en un nombre fini de points (là où la densité est continue),
- F est croissante sur $\mathbb{R}$ (comment le prouver ?)
- $\lim_{-\infty} F = 0$ et $\lim_{+\infty} F = 1$

Une densité est alors $f = F'$ là où F est C^1.

Exercice 5 : Soit $F(x) = e^t$ si $t \leq 0$ et $F(t) = 1$ si $t \geq 0$.
Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable à densité et en déterminer une densité.
Soit X une telle variable. Déterminer $\mathrm{P}(-1 \leq X < 2)$.

Remarque : Si X est une variable aléatoire discrète, sa fonction de répartition est alors en escalier.
X peut-elle alors être à densité ?

3.2 Si F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire

Théorème : si F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X , alors
X est à densité $\Longleftrightarrow$ F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf en un nombre fini de points (là où la densité est continue).
Une densité de X est alors $f = F'$ là où F est de classe C^1.

Méthode : Comment montrer qu'une fonction est continue ?

N.B. Que peut-on dire de la fonction de répartition de X si X est à densité ?

Exercice 6 type : Soit f définie par $f(t) = e^{-t}$ si $t \geq 0$ et 0 sinon.
Montrer que f est une densité de probabilité.
Soit X de densité f. Montrer que $\mathrm{P}(X \geq 0) = 1$ et en déduire que $Y = \sqrt{X}$ est définie presque sûrement.
Déterminer la fonction de répartition G de Y en fonction de celle F de X.
En déduire que Y est une variable à densité et en déterminer une densité.

Méthode : Quand une V.A. Y est définie à partir d'une autre $Y = f(X)$,
- On détermine la fonction de répartition G de Y en fonction de celle F de X (comment ?)
- La fonction de répartition de X vérifie les critères de fonction de répartition de variable à densité.(qui sont ?)
- On en déduit que les 2 critères des variable à densité (qui sont ?) sont vérifiés.
- On en déduit alors que Y est à densité et qu'une densité est G' là où G est de classe C^1.

N.B. On reste formel aussi longtemps que possible. On n'a généralement pas besoin de calculer la fonction de répartition de X.

N.B. Quand on calcule $\mathrm{P}(a \leq X \leq b)$, il faut d'abord vérifier l'ordre des bornes.

4 Espérance

4.1 Définitions

Définition : Pour une variable X de densité f, X a une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty}.tf\left(t\right)dt$ converge.
On a alors $E\left(X\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}.tf\left(t\right)dt$
(la convergence simple équivaut ici à l'absolue convergence)

Exercice 7 : Soit $\alpha>1$ et f définie par $f\left(x\right)=\frac{\alpha-1}{x^{\alpha}}$ si $x\geq1$ et 0 sinon. Montrer que f est une densité.
Soit X de densité f. Pour quelle valeurs de α, X a-t-elle une espérance ?

Théorème : moment d'ordre 2 X^2 a une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty}.t^2f\left(t\right)dt$ converge.
On a alors $E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}.t^2f\left(t\right)dt$ (appelé moment d'ordre 2)

Exercice 8 : Soit f définie par $f\left(t\right)=\frac{1}{2}e^{-2t}$ si $t\geq0$ et $f\left(t\right)=0$ sinon.
Montrer que f est une densité. Soit X de densité f.
Montrer que X et X^2 ont une espérance et calculer les.
En déduire la variance de X.

Théorème : Variance X a une variance si et seulement si X et X^2 ont une espérance.
On a alors $V\left(X\right)=E\left(\left[X-E\left(X\right)\right]^2\right)=E\left(X^2\right)-E\left(X\right)^2$

4.2 Opérations

Théorème de transfert : Pour une variable X de densité f, et g une fonction continue sauf en un nombre finis de points.
$Y=g\left(X\right)$. a une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty}.g\left(t\right)f\left(t\right)dt$ est absolument convergente. On a alors $E\left(g\left(X\right)\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}.g\left(t\right)f\left(t\right)dt$

Linéarité : Si X a une espérance et a et b réels alors alors $E\left(aX+b\right)=aE\left(x\right)+b$
Si X a une variance alors $V\left(aX+b\right)=a^2V\left(X\right)$

Exercice 8 : Pour le démontrer dans le cas où $a<0$ et que la densité de X.est continue sur $\mathbb{R}$.
comment déterminer la densité g de Y ?
Par un changement de variable, montrer $\int_{-\infty}^{+\infty}t\cdot g\left(t\right)dt$ converge et vaut $aE\left(x\right)+b$

Linéarité : Si X et Y à densité ont une espérance alors $E\left(X+Y\right)=E\left(X\right)+E\left(Y\right)$ (indémontrable)

Linéarité : Si X et Y à densité ont une variance et sont indépendantes alors
$V\left(X+Y\right)=V\left(X\right)+V\left(Y\right)$

Centrée réduite : X est centrée si $E\left(X\right)=0$, elle est réduite si $V\left(X\right)=1$.
Soit X ayant une espérance et une variance non nulle alors
$X^*=\dfrac{X-E\left(X\right)}{\sqrt{V\left(X\right)}}$ est centrée-réduite.

5 Lois usuelles

5.1 Loi uniforme

Modèle : toutes les valeurs de l'intervalle réel $[a, b]$ sont équiprobables.
Traduction : la densité est constante $f(t) = k$ sur tout l'intervalle et $f(t) = 0$ nulle en dehors.
Comment déterminer k ?

Définition : Pour $a < b$: X suit une loi uniforme sur $[a, b]$ notée $\mathcal{U}_{[a,b]}$ si sa densité est
$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Simulation : `randomize;` (une seule fois au début) ... `x:=random(b-a)+a;`

Théorème : Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$ alors X a une espérance et $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.
(Hors programme : $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$)

Exercice 9 : Soit X_n de loi uniforme sur $X(\Omega) = \left\{\frac{i}{n} \ / \ i \in [[0, n-1]]\right\}$
Déterminer la loi de X et sa fonction de répartition F_n sur $X(\Omega)$.
Soit $x \in [0, 1[$.
En notant [] la partie entière, encadrer nx entre deux entiers successifs et en déduire un encadrement de x entre deux éléments de $X_n(\Omega)$
En déduire la valeur de $F_n(x)$ puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.
On dit que X_n converge en loi vers une loi uniforme sur $[0, 1]$

5.2 Loi exponentielle

Durée de vie : Soit X la durée de vie d'un appareil.
Comment traduire avec X
- il tombe en panne à l'instant t ?
- il est en panne à l'instant t.
- il fonctionne à l'instant t ?

Modèle : On dit que la durée de vie est sans mémoire si le fait d'avoir déjà fonctionné un certain temps n'influe pas sur le temps de (bon) fonctionnement ultérieur

Formalisation : X est sans mémoire si pour tout t et $h \geq 0.$: $\mathrm{P}_{X>t}(X > t + h) = \mathrm{P}(X > h)$

Définition : Soit $\alpha > 0$. X suit une loi exponentielle de paramètre α notée $\varepsilon(\alpha)$ si sa densité est
$f(t) = \begin{cases} \alpha e^{\alpha t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

A remarquer : Si $X \hookrightarrow \varepsilon(\alpha)$ alors pour tout $x \geq 0$: $\mathrm{P}(X > x) = \exp(-\alpha x)$ et
$\mathrm{P}(X \leq x) = 1 - e^{-\alpha x}$ (comment calculer cette probabilité ?)

Théorème : Si $X \hookrightarrow \varepsilon(\alpha)$ alors X a une espérance et une variance et $E(X) = 1/\alpha$ et $V(X) = 1/\alpha^2$

Exercice 10 : Soit $I_n = \int_0^{+\infty} t^n \alpha e^{-\alpha t} dt$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $t^n e^{-\alpha t/2} \to 0$ et en déduire que I_n converge.
Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n et en déduire la valeur de I_n en fonction de n.
Retrouver alors l'espérance puis la variance d'une loi exponentielle.

Simulation : On montre que si $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$ alors $Y = -\frac{1}{\alpha}\ln(X) \hookrightarrow \varepsilon(\alpha)$ (comment le faire ?)

```
writeln('paramètre ?');readln(alpha);
randomize; (une seule fois au début) ...
x:=random;y:=-ln(x)/alpha;
```

Théorème (Modèle) : Soit X variable à densité; alors
X suit une loi exponentielle $\Longleftrightarrow$ X est sans mémoire et $\mathrm{P}(X \geq 0) = 1$

Exercice 11 : Démontrer la partie directe.

Réciproque : On montre que $\mathrm{P}(X > h + t) = \mathrm{P}(X > h)\,\mathrm{P}(X > t)$.
On considère $g(t) = \mathrm{P}(X > t)$. Pourquoi g est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Quel est son sens de variation ? Que vaut $g(t+h)$?
1) $g(1) > 0$:
Que vaut $g(1)$ si $X \hookrightarrow \varepsilon(\alpha)$? Pour poser $\alpha = -\ln[g(1)]$, on montre d'abord que $g(1) \neq 0$:
On montre d'abord (par récurrence) que $g(n \cdot x) = g(x)^n$ donc avec $x = \frac{1}{n}$: $g(1) = g\left(\frac{1}{n}\right)^n$
Et par l'absurde : si $g(1) = 0$ alors $g\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \to 0$ quand $n \to +\infty$. et par continuité $g\left(\frac{1}{n}\right) \to g(0) = 1$.
Soit alors $\alpha = -\ln(g(1))$.
2) $g\left(\frac{p}{q}\right)$ avec p et q entiers.
Quelle devrait être alors la fonction $\varphi(t) = g(t)\exp(\alpha t)$ sur $\mathbb{R}^+$?
a) pour les sommes : on a $\varphi(+h) = \varphi(x) \cdot \varphi(h)$ pour tout x et $h \geq 0$.
b) Pour les produits par un entier p : par récurrence, $\forall p \in \mathbb{N} : \varphi(px) = \varphi(x)^p$
c) Pour les quotients par un entier q : avec $x = \frac{y}{q}$ on a $\varphi(y) = \varphi\left(\frac{y}{q}\right)^q$ et $\varphi\left(\frac{y}{q}\right) = \varphi(y)^{1/q}$
d) Pour les rationnels $\frac{p}{q}$ on a alors $\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = \varphi(1)^{p/q} = 1$
3) Pour les réels
On approche les réels $x \geq 0$ par des rationnels u_n :
$[nx] \leq nx < [nx] + 1$ donc $u_n = \frac{[nx]}{n} \leq x < u_n + \frac{1}{n}$ et $|x - u_n| < \frac{1}{n}$
φ est continue sur $\mathbb{R}$. Et comme $u_n \to x$ alors $1 = \varphi(u_n) \to \varphi(x)$ donc $\varphi(x) = 1$ pour tout $x \geq 0$
4) On revient à la fonction de répartition et à la densité :
a) Pour tout $x \geq 0$: $g(x) = e^{-\alpha x}$ donc $F(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = 1 - e^{-\alpha x}$ pour $x \geq 0$ et comme la fonction de répartition est croissante, elle est nulle sur $\mathbb{R}^-$.
b) F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc une densité est $F'(x) = 0$ si $x < 0$ et $F'(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ si $x \geq 0$
c) Où l'on reconnaît une loi exponentielle de paramètre α.

5.3 Loi normale (de Laplace-Gauss)

5.3.1 Loi normale centrée réduite

Modèle, théorème de la limite centrée (admis) : Quelque soit la loi $\mathcal{L}$ (discrète ou de densité) ayant une espérance et une variance ;
si les variables aléatoires X_i sont de même loi $\mathcal{L}$ et sont indépendantes alors la somme $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ou la moyenne $M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ centrée réduite S_n^* (qui vaut ?) converge en loi vers une loi normale centrée réduite (i.e. sa fonction de répartition tend vers Φ)

Exercice 12 : Montrer que $S_n^* = M_n^*$

Exercice 13 : Montrer que pour tout $t \geq 1 : t \leq t^2$ et en déduire que $\int_1^{+\infty} e^{-t^2 dt}$ converge.
En déduire que $\int_{-1}^{-\infty} e^{-t^2 dt}$ converge également

Théorème (admis) : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

Définition : X suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ si sa densité est $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$.
Densité paire et inflexion en -1 et en 1.
Sa fonction de répartition est usuellement notée Φ

Exercice 14 : Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 15 : Montrer que $\int_0^x e^{-t^2/2} dt = \int_{-x}^0 e^{-t^2/2} dt$ et en déduire que $\int_{-\infty}^0 \varphi(t)\, dt = \frac{1}{2}$.

Théorème : fonction de répartition La fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite Φ vérifie :
- $\Phi(0) = \frac{1}{2}$
- $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ (symétrie de la courbe représentative par rapport au point de coordonnés $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

Exercice 16 : Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Calculer grâce à la table de la loi, $\mathrm{P}(X \leq 1)$; $\mathrm{P}(X \geq 1)$; $\mathrm{P}(X \leq -2)$; $\mathrm{P}(-2 \leq X \leq 1)$

Théorème : Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ alors X est centrée et réduite. (traduction ?)

Preuve : $te^{-t^2/2} = o(e^{-t})$ (le prouver) donc $\int_0^{+\infty} t\varphi(t)\, dt$ converge (on peut aussi primitiver $te^{-t^2/2}$)
Et par imparité $\int_{-\infty}^0 t\varphi(t)\, dt = -\int_0^{+\infty} t\varphi(t)\, dt$ (comment le prouver ?)
donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t)\, dt = 0$ et
Conclusion : $\boxed{X \text{ a une espérance } E(X) = 0.}$
On intègre par parties $\int_0^M \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^2 e^{-t^2/2} dt$ avec $u(t) = te^{-t^2/2}$ (le t étant nécessaire comme dérivée du contenu) et on trouve que
$\int_0^{+\infty} t^2\varphi(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\, dt$ et par parité $\int_{-\infty}^0 t^2\varphi(t)\, dt = \int_0^{+\infty} t^2\varphi(t)\, dt$.
Donc X^2 a une espérance et $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt = 1$
Conclusion : $\boxed{X \text{ a une variance } V(X) = 1}$

Simulation : On peut utiliser la limite centrée.
Si $X_i \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$ on a $E(X_i) = \frac{1}{2}$ et $V(X_i) = \frac{1}{12}$ on a $S_n^* = \left(\sum_{i=1}^n X_i - \frac{n}{2}\right) / \sqrt{\frac{n}{12}}$ centrée réduite qui converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$
La valeurs de n pour avoir une bonne précision est discutable.
Ici, avec $n = 10$:
`randomize;` (une seule fois au début) `n:=10;...`

```
S:=0;
for i:=1 to n do S:=S+random;
X:=(S-n/2)/sqrt(n/12);
```

5.3.2 Loi normale

Défintion : $v = \sigma^2 \geq 0$ et $m \in \mathbb{R}$.
X suit une loi normale de paramètres v et m notée $\mathcal{N}(m,v)$ si $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite.
La densité de X est alors $f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2/2\right]$.
La courbe représentative de la densité a un maximum en m et des points d'inflexion en $m \pm \sigma$

Théorème : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,v)$ alors X a une espérance et une variance et $E(X) = m$ et $V(X) = v$

6 Interprétation.

Pour les lois de $\min$ (ou $\inf$) et $\max$ (ou $\sup$) on procède par :

- $(\min > t) = (\text{ tous} > t)$ qui se formalise par ?
- $(\max \leq t) = (\text{ tous} \leqslant t)$ qui se formalise par ?

Pour une durées de fonctionnement X

il faut interpréter : (ECRICOME 2001)

- $X \geq t$ signifie que la machine fonctionne (encore) à l'instant t.
- $X < t$ signifie qu'elle est en panne à l'instant t.
- Le nombre de machine en panne à un instant donné suivra souvent une loi binomiale (revoir les conditions , l'espérance et la variance)

Pour la partie entière

comme elle ne prend que des valeurs entières, elle n'est pas à densité.
On n'étudie plus la fonction de répartition mais directement la loi.
On a $[X] \leq X < [X] + 1$ et ou encore $([X] = n) = (n \leq X < n + 1)$

7 Approximation

7.1 Bienaymé & Tchebichev

Théorème : si X (à densité) a une espérance m et une v variance alors $\mathrm{P}\left(|X - m| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{v}{\varepsilon^2}$

Preuve : on part de $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$ que l'on calcule par le théorème de transfert :
$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - m)^2 f(t)\,dt$ que l'on découpe suivant que $|t - m| \geq \varepsilon$ ou pas (résolution ?)

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_{-\infty}^{m-\varepsilon} (t - m)^2 f(t)\,dt + \int_{m-\varepsilon}^{m+\varepsilon} (t - m)^2 f(t)\,dt + \int_{m+\varepsilon}^{+\infty} (t - m)^2 f(t)\,dt \\ &\geq \int_{-\infty}^{m-\varepsilon} (t - m)^2 f(t)\,dt + \int_{m+\varepsilon}^{+\infty} (t - m)^2 f(t)\,dt \end{aligned}$$

Là où$(t - m)^2 \geq \varepsilon^2$ on a :

$$\int_{-\infty}^{m-\varepsilon} (t - m)^2 f(t)\,dt \geq \int_{-\infty}^{m-\varepsilon} \varepsilon^2 f(t)\,dt = \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{m-\varepsilon} f(t)\,dt$$

et on reconnaît dans cette dernière intégrale $\mathrm{P}(X \leq m - \varepsilon)$
et de même $\int_{m+\varepsilon}^{+\infty} (t - m)^2 f(t)\,dt \geq \varepsilon^2 \mathrm{P}(X \geq m + \varepsilon)$
Et en remettant tout bout à bout

$$\begin{aligned} V(X) &\geq \varepsilon^2 \left[\mathrm{P}(X \geq m + \varepsilon) + \mathrm{P}(X \leq m - \varepsilon)\right]) \\ &\geq \varepsilon^2 \mathrm{P}\left(|X - m| \geq \varepsilon\right) \end{aligned}$$

Utilisation : Ce théorème resservira dans l'estimation par intervalle de confiance sous la forme $\boxed{\mathrm{P}\left(|X-m| \leq \varepsilon\right) \geq \dfrac{v}{\varepsilon^2}}$

7.2 Valeur approchée

Loi normale : Si les X_i sont indépendantes et de même loi ayant une espérance et une variance alors
une valeur approchée de la fonction de répartition de la somme (ou de la moyenne) centrée réduite est donnée par Φ.

Cas particulier : Une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,p\right)$ est somme de lois de Bernouilli $\mathcal{B}\left(p\right)$ indépendantes.
Donc une valeur approchée de $\mathcal{B}\left(n,p\right)$ est donnée par $\mathcal{N}\left(np,npq\right)$ avec $q=1-p$

Loi de Poisson : Une valeur approchée de $\mathcal{B}\left(n,p\right)$ est donnée par $\mathcal{P}\left(np\right)$

Loi binomiale : Une valeur approchée de $\mathcal{H}\left(N,n,p\right)$ est donnée par $\mathcal{B}\left(n,p\right)$

Morale : $\mathcal{H}\left(N,n,p\right) \simeq \mathcal{B}\left(n,p\right) \simeq \mathcal{N}\left(np,npq\right)$