Intégrales

1 Primitives

Prérequis savoir calculer les dérivées des fonctions usuelles (en particulier $\frac{1}{x^n}$) et les dérivées des fonctions composée !

Définition : F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et si $\cdots$
Comment tester un candidat primitive ?

Méthode : On trouve à peu près une primitive, on la dérive, puis on ajuste les constantes.

Exercice : $f(x) = (3x+1)^3$; $g(x) = (\ln(2x+1))^3 \frac{1}{2x+1}$; $h(x) = 2^x$

Puissances : $f(x) = \frac{1}{x^n}$ alors $F(x) = \frac{1}{x^{n-1}}$ a pour dérivée $F'(x) = \ldots$ donc une primitive est : $F(x) = \ldots$
$f(x) = \frac{1}{x}$ se primitive en $\ldots$ sur $]0,+\infty[$ et $\ldots$sur $]-\infty,0[$ (ou bien $\ln|x|$ sur chacun de ces deux intervalles)
Une puissance au dénominateur se primitive en une puissance de moins.
Une puissance au numérateur se primitive en une puissance de plus.

Usuelles :

Fonction :	$()^n$	$\dfrac{1}{()^n}$	$\dfrac{1}{()}$	$\exp()$
Presque primitive	$()^{n+1}$	$\dfrac{1}{()^{n-1}}$	$\ln(+)$ ou $\ln(-)$	$\exp()$

Exercice : $f(x) = \frac{1}{(3x+1)^3}$; $g(x) = \frac{1}{(\ln(2x+1))^3}\frac{1}{2x+1}$

Produit : Un produit ne se primitive pas simplement sauf $f(u(x))\,u'(x)$: ...
Idées : changer un produit en puissance ou en somme.

Exercice : primitiver : $f(x) = (x+1)^2 x$; $g(x) = \frac{1+x+x^3}{x^2}$; $h(x) = \frac{x}{(2x+1)^2}$; $k(x) = (x+1)^2(x+1)^3$
$u(x) = \frac{1}{(e^{2x}+1)^3}e^{2x}$; $v(x) = (e^{2x}+1)^2 e^x$; $w(x) = \frac{(2x+2)^2}{(x+1)^4}$

Théoréme : f fonction continue sur un intervalle I. Alors elle a une primitive F sur I (en fait, une infinité).

N.B. En général, on ne peux pas exprimer les primitives avec les fonctions usuelles.

Exercice : Montrer que $G : x \to \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}dt$ est définie et dérivable sur $]0,1[$.

2 Intégrale sur un segment d'une fonction continue.

Définition : f fonction continue sur un intervalle I. $a \gtrless b \in I$ et F une primitive de f sur I alors $\int_a^b f = [F]_a^b = F(b) - F(a)$.

N.B. L'intégrale ne se calcule par primitivation que pour les fonctions continues.

Découpages : Chasles (bornes variables et contenu fixe, $\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt = \int_1^{n+1} \frac{1}{t}dt$),
linéarité (bornes fixes et contenu variable $\sum_{k=0}^n \int_0^1 t^k dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^n t^k dt$),
constantes en facteur.

Intégration par parties On dérive une partie et on primitive l'autre : $\int_a^b u'(t) \cdot v(t)\, dt = ...$
si u et v sont de classe C^1 sur $[a, b]$ ou $[b, a]$

Exercice Le démontrer en dérivant le produit $u \cdot v$.
Pourquoi C^1 et pas simpelment dérivable ?

Relation de récurrence : se démontre en général par intégration par parties.
N.B. Bien choisir la partie à dériver et celle à primitiver.

Exercice : $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^x dx$. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.

Inégalités (positivité) : On encadre le contenu, pour tout x de l'intervalle d'intégration, puis on intègre de part et d'autre par rapport à x, en vérifiant l'ordre des bornes.

Empirique Pour avoir un $\frac{1}{n+1}$ dans le majorant de l'intégrale, on conserve une puissance n dans le majorant du contenu.

Exercice : $I_n = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^n} dx$. Etudier les variations de $x \to xe^x$ sur $[0, 1]$ et en déduire que $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{(n-1)}$

Intégrale fonction des bornes : Si f est continue sur I et que $a \in I$ alors $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ est une primitive de f.
Si f est continue sur I et que a et b sont des fonctions dérivables sur J à valeurs dans I alors $G(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\, dt$ est dérivable sur J et $G'(x) = f(b(x))\, b'(x) - f(a(x))\, a'(x)$

Exercice le démontrer (indication : partir d'une primitive formelle de f)

Changement de variable : $\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = \int_a^b f(u(t))\, u'(t)\, dt$ avec u de classe C^1 sur $[a, b]$, f continue sur $u([a, b])$.
A utiliser : Pour une égalité d'intégrales avec changements de bornes et de contenu.
Pour exploiter la parité d'une fonction : utiliser $x = -t$
Mode d'emploi : on écrit d'abord le changement de variable, on le justifie ensuite.
Simple : quand l'ancienne variable x est fonction de la nouvelle : $x = u(t)$.
On remplace x par $u(t)$; dx par $u'(t)\, dt$; les bornes sur x par les valeurs correspondantes sur t : il faut résoudre $u(t) = a$ et $u(t) = b$.
Compliqué : quand la nouvelle x est donnée en fonction de l'ancienne
Il faut alors faire apparaître le bloc $u'(t)$, puis cacher t dans un $u(t)$ avant de pouvoir appliquer la formule de changement de variable.

Exemple : Montrer que si f est impaire et continue, $\int_{-1}^1 f(x)\, dx = \int_1^{-1} f(t)\, dt$ et en déduire sa valeur.
On effectue le changement de variable $x = -t$

Réponse $dx = -dt : x = 1 \Longleftrightarrow -t = 1 \Longleftrightarrow t = -1 : x = -1 \Longleftrightarrow t = 1$

$\int_{-1}^1 f(x)\, dx = \int_1^{-1} f(-t) - dt = \int_1^{-1} f(t)\, dt$ car f impaire.

Donc $\int_{-1}^1 f(x)\, dx = -\int_1^{-1} f(-t) - dt$ et $2\int_{-1}^1 f(x)\, dx = 0$.

Justification du changement de variable : $u : t \to -t$ est C^1sur $[-1, 1]$ et f est continue sur $u[-1, 1] = [-1, 1]$.

Exercice : Soit $x > 0$. Montrer que $\int\limits_1^x \frac{1}{t^n(1+t)}\, dt = \int\limits_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\, du$

Dérivée : On ne peut dériver le contenu qu'avec l'intégration par parties.
Mais, par changement de variable, on peut se ramener à un intégrale fonction des bornes.

Exemple : $f(x) = \int_1^2 \frac{1}{t} e^{-tx} dt$. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
Indication : changement de variable $tx = y$ où l'ancienne est fonction de la nouvelle puis théorème ci-dessous.

Réponse $t = \frac{y}{x}$: $dt = \frac{1}{x} dy$: $t = 1 \iff y = x$: $t = 2 \iff y = 2x$ et $f(x) = \int_x^{2x} \frac{x}{y} e^{-y} \frac{1}{x} dy = \int_x^{2x} \frac{1}{y} e^{-y} dy.$

On applique alors le théorème sur les intégrales fonction des bornes.

$y \to \frac{1}{y} e^{-y}$ continue sur $]0, +\infty[$.
Donc f est dérivable en x tel que $x \to x$
et et $x \to 2x$ sont C^1 et appartiennent à $]0, +\infty[$.

f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = 2\frac{1}{2x} e^{-2x} - \frac{1}{x} e^{-x}$.

Rare : Sommes de Riemann si f est continue sur $[0, 1]$ alors $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 f(t)\, dt$
C'est ce théorème qui fait le lien entre intégrale et aire (approchée par $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$), et qui permet de programmer le calcul de la valeur approchée d'une intégrale.

Méthode : Reconnaître le "n" (à peu près la borne supérieure de la somme et dans le $\frac{k}{n}$) puis faire apparaître $\frac{1}{n}$ devant la sommet $\frac{k}{n}$ partout où il y a k. Reconnaître alors f est vérifier sa continuité sur $[0, 1]$.

Exercice : Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n+1} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$

3 Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux.

Définition : f est continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ si on peut trouver des sous intervalles (une subdivision) $a = a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$ et des fonctions $\tilde{f}_i$ continues sur $[a_i, a_{i+1}]$ telles que $f = \tilde{f}_i$ sur $]a_i, a_{i+1}[$.
(si on peut prolonger f par continuité aux bornes)

N.B. On l'utilise quand on peut prolonger par continuité la "formule" de $f(x)$.

Exemple : f définie par $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in]0, 1[\\ \ln(x) \text{ si } x \in [1, 2[\\ \frac{1}{x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$ est prolongeable par :

N.B. La fonction prolongée ne coïncide pas avec f aux bornes.

Définition de l'intégrale : si f est continue par morceaux prolongeable par $\tilde{f}_i$ continue sur $[a_i, a_{i+1}]$ alors $\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \tilde{f}_i(x)\, dx$
C'est l'intégrales des prolongements par continuités.

Exemple : dans le cas précédent $\int_0^3 f(x)\, dx = ...$

Théorèmes :
- La positivité, Chasles et linéarité restent vraies.
- Si elle converge, l'intégrale fonction des bornes $G(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt$ est continue sur J (a et b sont continues sur J).
  Elle est dérivable en x tel que f continue en $a(x)$ et en $b(x)$.
- Le changement de variable et l'intégration par parties ne sont plus vraies pour des fonctions continues par morceaux. On doit les faire sur chacun des sous intervalles.

4 Intégrale impropre en $\pm\infty$.

4.1 Définition et opérations

Définition : Si f est continue ou continue par morceaux sur $[a, +\infty[$, on dit que $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est impropre en $+\infty$.
Elle converge si $\int_a^M f(t)\,dt$ a une limite finie quand $M \to +\infty$
On note alors $\lim_{M\to+\infty} \int_a^M f(t)\,dt = \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$. (Elle diverge sinon.)
De même en $-\infty$.

Exemple : Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ (impropre en $+\infty$) converge et calculer sa valeur.

Exercice : Intégrales de Riemann. Montrer que si $\alpha > 1$ alors $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge et diverge si $\alpha \leqslant 1$.

Opérations : Le plus simple est de revenir à l'intégrale partielle pour laquelle il n'y a pas de problème de convergence.
Sinon, il faut d'abord prouver la convergence de chaque morceau avant d'opérer.

Chasles : Si $\int_b^{+\infty} f(t)\,dt$ converge alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^{+\infty} f(t)\,dt$

Linéarité : Si $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et$\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ convergent alors
$\int_a^{+\infty} \alpha f(t) + \beta g(t)\,dt = \alpha \int_a^{+\infty} f(t)\,dt + \beta \int_a^{+\infty} g(t)\,dt$

Positivité : Si $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ convergent et que $f(t) \leqslant g(t)$ sur $[a, +\infty[$ alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant \int_a^{+\infty} g(t)\,dt$

Intégrale fonction des bornes : Si $\int_{-\infty}^a f(t)\,dt$ converge alors $G(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt$ est dérivable là où f est continue et $G'(x) = f(x)$

Exemple : Soit $F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t^2}dt$. Montrer que F est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et calculer sa dérivée

Intégration par parties et changement de variables : on revient à l'intégrale partielle.

Exercice Calculer $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}dt$

4.2 Comparaison pour les fonctions positives

Théorèmes : Si f et g sont positives et que $f \leqslant g$ sur $[a, +\infty[$ (ou que $f = o(g)$) alors
si $\int_a^{+\infty} f$ diverge alors $\int_a^{+\infty} g$ diverge "par minoration de fonctions positives".
si $\int_a^{+\infty} g$ converge alors $\int_a^{+\infty} f$ converge "par majoration de fonctions positives".

Démonstration : Si f est positive alors $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est croissante, en revenant à la définition du sens de variation.
Si $x \leqslant y$ alors $F(y) = F(x) + \int_x^y f(t)\,dt$ qui est positive par positivité de l'intégration.. Donc $F(x) \leqslant F(y)$
Il n'y a alors que deux possibilités : F a une limite finie en $+\infty$ ou F tend vers $+\infty$. Donc si $\int_a^{+\infty} f$ diverge c'est que $\int_a^x f \to +\infty$.

Théorèmes : Si f et g sont positives et que $f \sim g$ en $+\infty$ alors $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ sont de même nature "par équivalence de fonctions positives".

Références : Intégrales de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leqslant 1$. Exponentielles : $\int_1^{+\infty} e^{\alpha x}dx$ converge si $\alpha < 0$ et diverge si $\alpha \geq 0$

Exemple : Prouver la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{x^2+e^{-x}}{x^4+x}dx$ impropre en $+\infty$.

Définition et théorème : si $\int_a^{+\infty} |f|$ converge on dit que $\int_a^{+\infty} f$ converge absolument. Elle est alors convergente.
Ce théorème permet d'appliquer les critères de comparaison précédents à des fonctions au signe changeant.

Le retour de la série : Si f est positive continue ou CPM et décroissante, alors la série : $\sum_{k\geq 0} f(k)$ et l'intégrale impropre en $+\infty$: $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.
L'avantage d'étudier la convergence de l'intégrale plutôt que celle de la série est que l'on a plus de primitives et que l'on peut y faire des intégrations par parties.

5 Intégrale impropre en un point fini

Définition : f continue ou continue par morceaux sur $]a,b]$. On dit que $\int_a^b f$ est impropre en a.
Si $\int_x^b f$ a une limite finie quand $x \to a$, on dit que $\int_a^b f$ converge et $\int_a^b f = \lim_{x\to a} \int_x^a f$

Exemple : Montrer la convergence et calculer $\int_0^1 \ln(t)\,dt$.

Référence : Riemann si $\alpha \geq 1$ alors $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ diverge et converge si $\alpha < 1$. (c'est l'inverse du comportement en $+\infty$)

Théorèmes : Les théorèmes de comparaison, minoration, majoration de fonctions positives restent valables.

Opérations : Chasles et linérarité, positivité ne peuvent se faire qu'après vérification de la convergence de chaque morceau.
IPP et changement de variable se font en revenant à l'intégrale partielle.

Multi-impropriété : si une intégrale est impropre en plusieurs points, on isole chacun des points d'impropreté.
Elle convergera si elle converge en chacun des points d'impropreté et elle sera la somme des sous intégrales impropres.

Exemple : $f(x) = \frac{1}{x^2}$ si $x < 1$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}}$ si $x \in [0,1]$ et $f(x) = e^{-x}$ si $x > 0$.
Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$