# Synthèse Applications linéaires

par Pierre Veuillez

## Montrer que $f$ est une applications linéaire de $E$ dans $F$.

- Définition :

  Définie sur $E$ à valeurs dans $F$. ($f(u)$ calculable et $f(u) \in F$)
  Pour tout $u$ et $v$ de $E$ et $\alpha$ et $\beta$ réels, $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$

  Il faut ici choisir l'écriture de $u$ et $v$ en fonction de la définition de $f$.

- Théorème : Si pour tout $u$ de $E$, les coordonnées de l'image sont $\operatorname{mat}_{\mathcal{C}}(f(u)) = M \cdot \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ alors $f$ est l'application linéaire associée à la matrice $M$ de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{C}$ donc $f$ est une application linéaire.

## Déterminer la matrice de $f \in \mathcal{L}(E, F)$

- Théorème : Si pour tout $u$ de $E$, les coordonnées de l'image sont $\operatorname{mat}_{\mathcal{C}}(f(u)) = M \cdot \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ alors $f$ est l'application linéaire associée à la matrice $M$ de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{C}$ donc sa matrice de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$ est $M$

- Définition : On calcule les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$, puis leurs coordonnées, puis on met ces coordonnées en colonne.

## Liens avec les matrices :

- $f(u)$ se calcule via les ccordonnées de $u$ par : $\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(f(u)) = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f)\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u)$

  d'opù l'image.

  **N.B.** attention au choix de la base !

  exo type : ESC 2006

- Formule de changement de base pour $f \in \mathcal{L}(E)$.
  Utilisation : on a déterminé la matrice de $f$ dans une base $\mathcal{B}$ et dans une base $\mathcal{C}$ de $E$ et on en déduit

  $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})\operatorname{mat}_{\mathcal{C}}(f)\operatorname{mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ ("montrer que $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$" ou $A = P^{-1} \cdot B \cdot P$)

  avec $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ et $\operatorname{mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$ matrices de passage inverses l'une de l'autre.

- Si $f$ est bijective, la matrice de sa réciproque est $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right) = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f)^{-1}$ l'inverse de sa matrice.

- La matrice associée à une combinaison d'applications linéaires est la combinaison des matrices.

- La matrice associée à une composée est le produit de leurs matrices. (C'est l'origine de la formule de changement de base)

## Bijectivité de $f \in \mathcal{L}(E)$ avec $E$ de dimension finie.

sont équivalents :
$f$ injective ; $f$ surjective ; $f$ bijective ; $\ker(f) = \{0\}$ (si $f(u) = 0$ alors $u = 0$ ) ; $\operatorname{Im}(f) = E$ ; $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ inversible ; colonnes de $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ libres.

## Déterminer le noyau de $f \in \mathcal{L}(E, F)$

- $u$ appartient au noyau si et seulement si $f(u) = 0$

- On détermine une base du noyau en résolvant $f(u) = 0$ (écriture de $u$ à adapter à la définition de $f$ ) et en paramètrant.

- C'est un sous espace vectoriel de $E$

## Déterminer l'image de $f \in \mathcal{L}(E, F)$

- On montre que $v$ est dans l'image en cherchant et en trouvant $u \in E$ tel que $f(u) = v$ (écriture de $u$ à adapter à la définition de $f$)

- Base : on a sa dimension $n$ par le théorème du rang et la dimension du noyau et on en a une famille libre sous la forme $f(e_1) \cdots f(e_n)$ où les $e_i$ sont des vecteurs d'une base de $E$.

- Pour en avoir des équations cartésiennes, on résout $f(v) = (x, y, z)$ d'inconnue $v$.

  Les conditions portant sur $(x, y, z)$ restantes, donnent des équations de $\mathrm{Im}(f)$

- Base : $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ -où les $e_i$ sont les vecteurs d'une base de $E$- sont générateurs de l'image.

  Si ils ne sont pas libres, l'un est combinaison des autres et ceux là sont encore générateurs.

- C'est un sous espace vectoriel de $F$