Mémento Algèbre

par Pierre Veuillez

f endomorphisme associé à M dans une base. La matrice dépend de la base !

Espace vectoriel, application linéaire

- Quand l'ensemble est paramètré : $\mathrm{Vect}(\cdots)$
- Pour les preuves, adapter les notations (compactes ou développée) à la définition.
- Combinaison linéaire : nulle (famille libre), stabilité par (e.v.), image d'une (a.l.), coefficients d'une (coordonnées).

Lien entre f et sa matrice

- Pour trouver M, calculer les images par f des vecteurs de $\mathcal{B}$, puis leurs coordonnées **dans** $\mathcal{B}$.
- Quand on a la formule de f, écrire, pour tout vecteur u, les coordonnées de $f(u)$ sous la forme $M \cdot U$ où U sont les coordonnées de u.
  On prouve ainsi que f est l'application linéaire associée à M donc qu'elle est linéaire.
- Quand on connaît la matrice M de f, on a les coordonnées de $f(u)$ par $M \cdot U$ où U contient les coordonnées de u.
- Quand on a la matrice de f dans une base B et dans une base C, **on en déduit** la relation :
  $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})\,\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(f)\,\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(B)$

  (Il est rare que l'on utilise cette relation pour trouver la matrice de f)
- Opérations : liens entre l'application linéaire et la matrice associée.
  combinaison linéaire, composée/produit, image/produit; réciproque/inverse

Pour montrer que α est valeur propre

- Pour les matrices triangulaires.
- Définition : chercher ou donner directement $u \neq 0$ tel que $f(u) = \alpha u$ ou $(f - \alpha Id)(u) = 0$ ou encore $u \in \ker(f - \alpha Id)$ (sous espace propre)
- Chercher et trouver U colonne non nulle telle que $MU = \alpha U$ ou $(M - \alpha I)U = 0$
- Montrer que $f - \alpha Id$ n'est pas bijective ou montrer que $M - \alpha I$ n'est pas inversible

Pour montrer que α n'est pas valeur propre

- **Si** $f(u) = \alpha u$ **alors** $u = 0$
- $M - \alpha I$ est inversible
- la somme des dimensions des sous espaces propres est supérieure à l'ordre de la matrice.
- **une relation polynomiale.**

Pour trouver les valeurs propres

- **Si** la matrice est **triangulaire**, les valeurs propres sont les termes de sa diagonale.
- Utiliser une **relation polynomiale** pour trouver les valeurs propres possibles **puis tester** ces valeurs.
- Pour u un vecteur - ou U une colonne - résoudre $f(u) = \alpha u$ ou encore $(f - \alpha Id)(u) = 0$ et si on trouve des solutions autres que $u = 0$ alors α est valeur propre.
- Donner des vecteurs propres associé à des valeurs propres, et prouver qu'il n'y en a pas d'autres (dimension)
- α tels que $M - \alpha I$ n'est pas inversible, par Gauss (triangulaire avec un terme nul sur la diagonale)

Pour montrer qu'une matrice est diagonalisable

- M est symétrique (mais ne donne ni les valeurs propres ni la matrice de passage)
- Ecrire $M = PDP^{-1}$ (à partir d'une relation entre matrices)
- Trouver une base de vecteurs propres de f ou de colonnes propres pour M.
- Il suffit (non nécessaire) que M ait n valeurs propres distinctes
- Montrer que la somme des dimensions des sous espaces propres est égale à l'ordre de la matrice.
(la concaténation des bases des sous espaces propres forme alors une base de l'espace)

Pour montrer qu'une matrice n'est pas diagonalisable

- S'il n'y a qu'une valeur propre α possible (relation polynomiale), raisonnement **par l'absurde** : $M = P\alpha IP^{-1} = \alpha I$
- Déterminer les sous espaces propres, leur dimension, et la somme des dimensions n'est pas l'ordre de la matrice.

Pour montrer qu'une matrice est inversible

ou que f est bijectif (isomorphisme) : il **faut que** les dimensions des espaces de départ et d'arrivée soient les mêmes.

- Factoriser $I = MN$ et $NM = I$. Cela s'obtient souvent à partir de la **factorisation de I dans une relation polynomiale** ou par l'absurde pour non inversible.
- Montrer que la famille de ses colonnes est libre.
- Remarquer que M est une matrice de passage (matrice des coordonnées des vecteurs d'une base dans une autre base)
- Montrer que $\ker(f) = \{0\}$ ou que 0 n'est pas valeur propre.
- Gauss ou $MX = Y \iff X = NY$ (par résolution du système)

Pour montrer que l'on a une base

- Génératrice (résolution et paramètrage) et libre.
- Définition : $e_1, \ldots, e_n \in E$ et pour tout $u \in E$ il existe des uniques $\alpha_1 \ldots$ tels que $u = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ (les coordonnées)
- Libre + cardinal ou (plus rarement) génératrice + cardinal.
- Concaténation de familles de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes + cardinal
- Vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes + cardinal
- Echelonnée + cardinal
- Bases canoniques.

Pour trouver une base

- En résolvant puis en paramètrant les solutions, écrire $E = \mathrm{Vect}(\ldots)$ puis prouver que la famille est libre.
- Base de l'image : Dimension par noyau et th du rang, puis image de m vecteurs (des vecteurs de la base) images qui, avec un peu de chance, formeront une famille libre.
- A partir d'une génératrice, on supprime les vecteurs combinaison linéaire des autres pour avoir une famille encore génératrice et libre.
- Base de l'image : est engendrée par l'image d'une base puis on élimine.