Révisions ECE1

par Pierre Veuillez

1 DENOMBREMENT

Il faut savoir reconnaître les 3 situations suivantes qui sont utiles en cas d'équiprobabilité:

Combinaisons :

p choix simultanées parmi n objets. (ni ordre ni répétition)

Les tirages sont les combinaisons de p objets parmi n.

il y a C_n^p tirages possibles.

Si $0 \leq p \leq n, \quad C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Sinon, $C_n^p = 0$.

C'est aussi le produit des p premiers entier à partir de n divisé par le produit des p derniers: $C_7^3 = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1}$.

$C_n^p = C_n^{n-p}$. pour tout entier n et p.

$C_n^0 = 1$ pour tout entier n

$C_n^1 = n$ pour tout entier $n \geq 1$

Pour p et $n \in \mathbb{Z}, \quad C_n^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$, ou bien $C_n^p = C_n^{p-1} + C_n^p$.

Listes :

p tirages successifs parmi n objets avec remise (tirages avec ordre et répétition possible)

Les tirages sont les listes de p objets parmi n.

Il y a n^p tirages possibles.

Arrangements :

p tirages successifs parmi n objets sans remise (ordre et pas de répétitions possibles).

Les tirages sont les listes de p objets distincts parmi n (ou arrangements de p objets parmi n).

Il y a A_n^p tirages possibles.

- Si $0 \leq p \leq n$ alors $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.
- C'est aussi le produit des p premiers entiers à partir de n.

Dans les autres cas: "les résultats sont caractérisés par…".

2 PROBABILITES

Conditionnement :

La probabilité conditionnelle doit d'abord être cherchée en traduisant le conditionnement dans l'expérience.

Exemple 1 : On lance un dé. Le résultat est D. Puis on lance D fois une pièce. Soit X le nombre de pile obtenus. $p(X = i/D = n) =$? C'est la probabilité d'obtenir i $Pile$ quand on lance n fois la pièce. Donc X suit une loi binomiale de paramètres n et $1/2$

Exemple 2 : On lance une pièce, puis deux, puis trois.. jusqu'à ce que l'on obtienne au moins un pile. Loi du nombre N de lancers?:

$(N = n) = F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap P_n$. Donc $p(N = n) = p(F_1).p(F_2/F_1)\ldots p(P_n/F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_{n-1})$

Et $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_{n-1}$ indique que que d'une part on effectue bien le nième lancer et qu'on le fait d'autre part avec n pièces.

Traduction :

Il faut savoir déterminer les évènements dont on peut connaître facilement la probabilité ou la probabilité conditionnelle. (le résultat de chaque tirage dans des tirages successifs...)

Leur donner des noms (avec éventuellement des indices ou des variables aléatoires).

Enfin traduire les questions avec ces notations. Penser à préciser l'étendue des valeurs des indices en termes *de réunion ou d'intersection.*

Si on ne connaît que la probabilité conditionnelle et que l'on cherche la probabilité a priori, penser aux probabilités totales.

La langue vernaculaire peut causer des erreurs: confusion entre *et* et *ou*, entre la *négation* et le *contraire*. Par exemple : Les résultat possibles sont $Pile$ et $Face$. $Blanc$ est le contraire de $Noir$.

Erreurs :

Quand on a envie d'écrire un *événement conditionné* (alors que seule une probabilité peut l'être) c'est qu'il faut écrire une intersection. En en prenant la probabilité :

$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$ la probabilité conditionnelle apparaîtra.

Le *premier* pile au $n^{ième}$ lancer signifie que l'on a non seulement $Pile$ au $n^{ième}$ mais également qu'il n'y en a pas eu avant.

Crible :

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \ldots$.

$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ si A et B sont incompatibles.

$p(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i) = \lim_{N\to+\infty} p(\bigcup_{i=0}^{N} A_i)$ et si les $A_i$sont incompatibles $p(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} p(A_i)$

Probabilités composées :

$p(A \cap B \cap C) = p(A) \cdot p(B/A) \cdot p(C/A \cap B) \ldots$

On peut écrire cette formule dans n'importe quel ordre. Mais pour pouvoir interprèter les conditionnements, il faut souvent suivre la chronologie de l'expérience

$p(A \cap B \cap C) = p(A) \cdot p(B). \cdot p(C)$ si A, B et C sont indépendants.

$p(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i) = \lim_{N\to+\infty} p(\bigcap_{i=0}^{N} A_i)$

Probabilités totales :

On l'utilise quand la (probabilité de la) réalisation de l'événement A *dépend de* celles des événements B_1, B_2, ...

Il faut d'abord citer le système complet d'évènement (constitué par les différents conditionnements possibles). C'est lui qui indice la somme

$p(A) = p(A/B1).p(B1) + p(A/B2).p(B2) + \ldots$ où B_1, B_2, ... est un système complet d'évènements.

On peut aussi passer par la loi marginale à partir de la loi du couple. $p(X = i) = \sum_j p(X = i \cap Y = j)$

On connaît parfois la loi conditionnée d'une variable aléatoire.

Mot clé: **dépend de**

Bayes :

C'est l'autre façon de calculer une probabilité conditionnelle. (la définition mathématique de la probabilité conditionnelle)

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A).p(B/A)}{p(B)}$$

On l'utilise quand on connaît la probabilité conditionné dans l'autre sens. (typiquement la probabilité du passé conditionnée par le futur)

Pour calculer $p(B/A)$ on traduit le conditionnement dans l'expérience.

Pour calculer $p(B)$ on souvent recours à la formule des probabilités totales.

Exercice 1 : On lance indéfiniment une pièce.

I. Quel est le contraire de (n'avoir que des "pile").

II. Avoir au moins un "pile": codage.

III. Premier "pile" au niéme tirage: codage.

IV. Deuxième "pile" au niéme tirage: codage et probabilité. (penser à la loi binomiale)

V. Premier changement Pile/Face au $n$ième tirage.

Exercice 2 Dénombrement. Dans un jeux de 32 cartes, combien y a-t-il de façons de choisir 3 cartes qui soient (successifs/simultanés, avec/sans remise)

I. des as?

II. de même valeur?

III. des trèfles?

IV. de valeurs différentes?

V. au moins deux de même valeur?

3 VARIABLES ALEATOIRE

Erreurs :

une variable aléatoire n'est pas un évènement.

Une variable aléatoire n'est pas un nombre : le nombre de *Pile* en 10 lancers n'est pas connu avant de faire l'expérience. Pour le connaître il faudra conditionner.

Loi :

il faut donner à la fois les valeurs prises par la variable aléatoire et la probabilité qu'elle prenne chacune de ces valeurs. Quand on veut utiliser la loi, il faut d'abord vérifier que l'on est bien dans $X(\Omega)$.

Si N est une variable aléatoire, $p(X=N)$ n'est pas donné par la loi de X. Il faut passer par $p(X=n/N=n)$ puis revenir à $p(X=N)$ par la formule des probabilités totales ou par la décomposition $(X=N)=\bigcup_{n\in X(\Omega)}(X=n\cap N=n)$

Traduction :

(Le plus grand $\leq n$) = (tous $\leq n$) ou (le plus petit $\geq n$) = (tous $\geq n$)

(le n^{ieme} arrive au plus tard à l'instant t) = (à l'instant t il y en a au moins n présents).

Quand on construit un événement à partir de deux V.A., il faut les traduire en se ramenant à ceux dont on connaît la probabilité (loi ou fonction de répartition).

$(X=Y)=\bigcup_{i}(X=i\cap Y=i)$; $\quad (X<Y)=\bigcup_{i}(X=i\cap Y>i)$; $\quad (X+Y=k)=\bigcup_i (X=i\cap Y=k-i)$

Les valeurs de l'indice devant être telles que les événements soient possible. Pour les déterminer, on résout, $i\in X(\Omega)$ et $k-i\in Y(\Omega)$.

Loi conditionnelle :

Quand les conditions de l'expérience dépendent d'un résultat précédent, on ne dispose alors que de la loi conditionnelle. On utilise alors les probabilités totales pour trouver la loi a priori. Si les valeurs prises dépendent du contitonnement, prendre garde lors de la sommation (découper).

Il faut reconnaître les lois usuelles:

Binômiale :

Nombre de succès pour un nombre n d'expériences déterminé et indépendantes ayant toutes la même probabilité de succès.

Mots clés: Nombre de, n expériences, indépendantes, probabilité p.

Géométrique :

Rang du premier succès (ou nombre d'expérience pour) pour une suite infinie d'expériences indépendantes ayant toutes la même probabilité de succès.

Mots clés: Rang ou Nombre d'expériences, suite infinie d'expériences, indépendantes, probabilité p.

Hypergéométrique :

Nombre de succès pour des tirages sans remise (successifs ou simultanées).

Mots clés: Nombre de, n tirages *sans remise ou simultanés* , N objets, proportion p de type 1.

Exercice 1 :

On lance un dé. Soit D son numéro. On Lance ensuite D fois une pièce équilibrée. Soit X le nombre de "pile" obtenu. Quelle est sa loi? On a obtenu 3 "pile", quelle est la probabilité d'avoir eu 5?

Exercice 2 :

Deux urnes A et B contiennent au départ 1 boule rouge et une verte chacune. On répète indéfiniment: on tire au hasard une boule de chaque urne et on les échange. Soit $R_n$et V_n les variables aléatoires égales au nombres de boules rouges et verte dans l'urne Aà l'issue dun ième échange. Comment obtenir les lois de $R_n$et V_n?

4 INEGALITES

Utilisation :

Elles permettent d'obtenir des limites par encadrement ou minoration/majoration, de déterminer des signes, des précision (quand on majore l'écart entre deux quantités) .

Pour les inéquations très simples (p.ex $\exp(x) > 1$).

On peut résoudre de façon directe en manipulant simultanément les deux cotés de l'inégalité. Il faut procéder par équivalence. Les fonctions strictement croissantes ou décroissantes le permettent. Penser à justifier que les deux membres de l'inégalités sont dans l'intervalle où l'on connaît le sens de variation de la fonction. Pour les produits et quotient, justifier le signe du facteur. penser que la racine d'un carré est la valeur absolue.

On se ramène sinon à l'étude du signe de la différence.

Pour les fonctions *polynôme de degré 2*, en connaissant les racines de l'équation, on obtient le signe de l'expression.

On connaît le signe d'un produit ou d'un quotient. Si l'on parvient à *factoriser* une expression en des termes de signe connu, par un tableau de signe on obtient son signe.

Pour le signe d'une fonction quelconque, on étudie son sens de variation et ses valeurs aux extrema. On en déduit (bijectivité) l'existence des points où la fonction s'annule. (Les racines peuvent être évidentes). On détermine alors (sens de variation +racines) le signe de la fonction. Si le sens de variation et les racines de la fonction sont évidentes, on peut en profiter!($\exp(x) - 1 > 0$)

Exercice 1 :

Résoudre $e^x > \ln(x) + e$. (Pour le signe de $e^x - 1/x$, factoriser, puis étudier)

Exercice 2 :

Signe de $\dfrac{1}{e^{\ x}} - \dfrac{x+1}{e^x - 2}$.

Pour les sommes, intégrales et limites :

souvent, on encadre d'abord le contenu et on somme, intègre ou passe à la limite dans les inégalités.

5 LIMITES

D'abord , il faut regarder si la forme est indéterminée ou non.

Pour cela, il convient de connaître les limites des fonctions usuelles ainsi que les opérations sur les limites.

Un fonction *continue* en un point a pour limite sa valeur en ce point.

Si on dispose d'inégalités :

on peut obtenir l'existence et la valeur de la limite par encadrement, minoration ou majoration.

Si la forme est indéteminée :

On se ramène par changement de variable $h = x - a$ en 0 où l'on dispose de nombreux outils.

On factorise dans chaque partie de l'expression la quantité prédominantes. Il faut pour cela connaître les échelles de comparaison ln, puissance, exponentielle, en 0 et à l'infini. On simplifie les puissances, et on se ramène aux échelles de comparaisons ou aux équivalents usuels.

S'il y a des *exponentielles* que l'on ne peut pas comparer, on passe toutes les parties sous forme exponentielle.

S'il y a des formes indéterminées dues à des *logarithmes* ou des racines on factorise d'abord à l'intérieur puis on développe à l'extérieur. ($\ln(ab) = \ln(-a \cdot -b) = \ln(-a) + \ln(-b)$ si $a < 0$ et $b < 0$)

L'étape suivante en cas d'échec de la factorisation est le développement limité (connus en 0, changement de variable $h = t - a$) qui ramène toutes les fonctions à des expressions polynômes (au reste près).

Exercice 1 :

Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $e^x - \ln(e^x - x^2)$;

de $e^{(x^2)} - e^x - x^2$;

Exercice 2 :

Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $(\ln(e^x - 1) - x) .x$;

Déterminer la limite quand x tend vers 1 de $(\ln(1 + x) - \ln(2)) / (x - 1)$.

6 SENS DE VARIATIONS

Utilisation :

Le sens de variation des fonctions permet de transformer des inégalités par équivalence. Il ne permet pas d'en obtenir ex nihilo.

Bijection :

Le sens de variation plus la continuité donne la bijectivité (une unique solution à l'équation $f(x) = cst$ si cst appartient bien à l'intervalle d'arrivée).

Rreciproque :

Une fonction continue strictement monotone a une *réciproque*:

g est la réciproque de f de I dans $f(I) = J$ si:

pour tout x de $I, g(f(x)) = x$ et tout y de $J, \quad f(g(y)) = y$.

g est la réciproque de f de I dans J si

f est définie de I dans J, si g est définie de J dans I et si pour tout x de I et y de $J, \quad f(x) = y \Leftrightarrow x = g(y)$. (c'est ce qui permet de déterminer l'expression d'une réciproque).

Exercice :

$f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$. Réciproque?

On peut conclure pour les cas élémentaires par les sens de variation d'une composée.

Suites :

Une suite croissante et majorée est convergente. Une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$

Démonstration :

Dans les cas simples :

On peut connaître directement le sens de variations des fonction usuelles ou des composées simples.

En général , là où la fonction est dérivable, on détermine le signe de la dérivée. (Pour l'étude du signe voir ci-dessus)

Suites :

Pour les suites $u_{n+1} = f(u_n)$ le sens de variation de f permet par récurrence d'obtenir celui de u.

Pour les suites implicites, $f(u_n) = n$, ou $f_n(u_n) = 0$ on compare les images et on revient à la suite grâce au sens de variation de f.

7 SYMBOLE Σ

Indice :

On repère pour commencer la *variable* de sommation et les constantes.

$\displaystyle\sum_{i=m}^{n} u_i$ est définie pour $m \leq n$. L'indice i est muet et peut être remplacé par n'importe quel autre symbole.

Références :

On connaît pour tout entier n, et pour $m \leq n$, $\sum_{i=m}^{n} 1 = n - m + 1$, $\sum_{i=0}^{n} i$, $\quad \sum_{i=0}^{n} i^2$, $\quad \sum_{i=0}^{n} i^3$ et $\sum_{i=0}^{n} q^i$ pour $q \neq 1$.

Récurrences :

Quand la valeur de la somme jusqu'à n est donnée par l'énoncé, on peut démontrer le résultat par récurrence:

Pour calculer $\sum_{i=0}^{n+1} u_i$on décompose, $\sum_{i=0}^{n+1} u_i = \sum_{i=0}^{n} u_i + u_{n+1}$et on utilise la valeur de $\sum_{i=0}^{n} u_i$connue par hypothèse de récurrence.

Calcul :

l'objectif il est de se ramener aux sommes connues.

Quand l'expression à sommer dépend de l'indice (ce qui arrive souvent avec la formule des probabilités totales), on découpe la somme pour n'avoir qu'une seule formule dans la plage d'indices.

On peut substituer tout entier à la borne supérieure des formules.

Les constantes (par rapport à l'indice de sommation) en facteur de l'ensemble des termes de la somme peuvent être factorisés devant la somme.

Si l'indice inférieur n'est pas 0, $\sum_{i=2}^{n} u_i = \sum_{i=0}^{n} u_i - u_0 - u_1$.

S'il en manque d'avantage, $\sum_{i=m}^{n} u_i = \sum_{i=0}^{n} u_i - \sum_{i=0}^{m-1} u_i$

Si la puissance n'est pas i, $\quad q^{i/2} = (q^{1/2})^i$, $\quad 1/q^i = (1/q)^i$, $\quad a^{2i}/b^i = (a^2/b)^i$

L'écriture factorielle des coefficients du binôme permet des simplification

Si on a des produits, on peut les développer, et séparer en plusieurs sommes.

Inégalités :

si on nous a fait démontrer préalablement une inégalité (*vérifier qu'elle est valables pur tous les indices de la somme)* on doit en faire la somme.

Erreur :

une somme de produits n'est pas le produit des sommes.

8 SUITES

Sont à connaitre :

Les suites (*raison constante*), arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires du second ordre à coefficients constants.

Les sommes partielles de $1, k, k^2, k^3, q^k$sont à connaître.

Pour les suites $u_{n+1} = f(u_n)$:

On étudie la fonction et on en déduit les propriétés de la suite:

$u_n \in I$ (que l'on traduit ,en inégalité), se démontre par récurrence

$f(x) \geq x$ sur I: si l'on sait que $u_n \in I$ (à démontrer auparavant par récurrence) alors (sans récurrence) $u_{n+1} \geq u_n$.

f croissante sur I: permet de démontrer par récurrence: $a \leq u_n \leq u_{n+1} \leq b$ ou $a \leq u_{n+1} \leq u_n \leq b$

Les solutions de $f(x) = x$: si $u_n$tend vers ℓ (croissante majorée) et que f est continue en ℓ (ce qui suppose que l'on connaisse la position de ℓ : on l'obtient par passage à la limite dans les inégalités sur u_n) alors $f(\ell) = \ell$. Et par élimination on déduit la seule valeur de ℓ possible.

Exemple 1 :

$u_{n+1} = \ln(u_n) + 1$.

$f(x) = x$ a pour unique solution $x = 1$ (étude des variations de $f(x) - x$)

On montre *par l'absurde* que si $u_0 < 1$, *la* suite n'est plus définie à partir d'une certaine valeur de n.

Si pour tout n, $u_n$est définie (i.e. $u_n > 0$) alors par récurrence on montre que $u_{n+1} \leq u_n < 1$. Comme la suite est par hypothèse minorée par 0, elle est convergente. Soit ℓ sa limite. $\ell \leq u_0 < 1$(suite décroissante).

Si f est continue en ℓ, i.e. $\ell > 0$, *alors* $f(\ell) = \ell$ et $\ell = 1$ (absurde car $\ell < 1$)

donc $\ell = 0$. Or si u_n tend vers 0, $u_{n+1} = f(u_n)$ tend vers $-\infty$.(limite de f en 0) et vers 0 en même temps. Ce qui est *contradictoire*.

Donc u_nn'est pas toujours positive. Soit n_0 tel que $u_{n_0} \leq 0$, alors u_{n_0+1} n'est plus défini.

Exemple 2 :

Si $f(x) = x$ pour α et β la récurrence sera du type $\alpha \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \beta$. d'où la suite croissante et majorée converge vers ℓ et $\alpha \leq \ell \leq \beta$.

Pour *éliminer* α: comme la suite est croissante, pour tout n, $u_n \geq u_0 > \alpha$. et par passage à la limite, $\ell \geq u_0 > \alpha$. Donc $\ell \neq \alpha$ et $\ell = \beta$.

Pour les suites implicites : $u_n$telles que $f(u_n) = n$ ou $f_n(u_n) = 0$

On a l'existence et l'unicité de $u_n$par bijectivité.

Le sens de variation de la suite est obtenu en prenant l'image par f : $n \leq n+1$ donc $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ d'où $u_n \geq ou \leq u_{n+1}$suivant le sens de variation de f;

On peut aussi utiliser la réciproque $u_n = f^{-1}(n)$ dont on connaît les propriétés par symétrie.

Dans le cas $f_n(u_n) = 0$, on compare $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$ pour x fixé et on compare en cascade : $f_{n+1}(u_n) < f_n(u_n) = 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$ d'où par le sens de variation de f_{n+1} la comparaison de u_n et u_{n+1} (sans récurrence)

Exemple 3 :

Pour montrer que u_n tend vers l'infini :

Croissante et non majorée. *Par l'absurde:*

Si elle est majorée par M (constante) , alors, elle est convergente vers $\ell \leq M$. Alors comme f est continue en ℓ , $f(u_n)$ tend vers $f(\ell)$. mais en même temps, $f(u_n) = n$ tend vers $+\infty$. Ce qui est absurde.

Donc u_nn'est pas majorée et tend vers $+\infty$.

*Par la réciproque*en utilisant les limites de la réciproque $u_n = f^{-1}(n)$ quand $n \to +\infty$.

9 CALCUL MATRICIEL

Règles de calcul :

Il faut connaître les règles de calcul et en particulier celles qui ne sont pas valables. Si A, B et C sont des matrices de taille convenable:

$A \cdot B$ n'est pas toujours égal à $B \cdot A$.

Par contre si α un réel, $A \cdot (\alpha \cdot B) = \alpha \cdot (A \cdot B)$

Si $n \in \mathbb{N}$, $\quad (A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} C^k A^k . B^{n-k}$ *seulement si* $A \cdot B = B \cdot A$.

Si A, B et C sont des matrice, si $A \cdot B = A \cdot C$ alors $B = C$ *seulement si* A est inversible.

Si $A \cdot B = 0$ alors $B = 0$ *seulement si* A est inversible.

Par contre si α est un réel, si $\alpha \cdot B = 0$ alors $\alpha = 0$ ou $B = 0$.

$A^2 + 2A = A \cdot (A + 2.I)$ et non pas $A(A + 2)$. (la somme $A + 2$ n'est pas définie)

Inverse : Il faut savoir calculer l'inverse d'une matrice :

Par la méthode de Gauss présentée sous forme matricielle, ou sous forme de système d'équations que l'on résout. Dans un cas comme dans l'autre les seules combinaisons donnant un équivalence sont:

$Li \leftrightarrow Lj$.

$Li + \lambda Lj \to Li$ (*seule* la ligne pivot Lj est multipliée)

$\lambda Lj \to Lj$ *à condition que* λ soit non nul.

Par la définition, en donnant une matrice B telle que $A \cdot B = I$ et $B \cdot A = I$. On obtient souvent cela à partir de relations $A^2 = \alpha A + \beta I$ que l'on réécrit: $A \cdot ((A - \alpha I) / \beta) = I$ et $((A - \alpha I) / \beta) \cdot A = I$.

Puissance : Pour calculer les *puissances* d'une matrice. Pour $n \in \mathbb{N}$.

Si α est un réel, $(\alpha I)^n = \alpha^n I$.

Pour les matrices *diagonales*, on élève les termes de la diagonales à la puissance voulue.

Si A s'écrit $A = P.D.P^{-1}$, on a $A^n = P.D^n.P^{-1}$ (utilisable si l'on connaît les puissances de D; en particulier si D est diagonale).

Par la formule du binôme de Newton, en écrivant $A = (M + N)$ où l'on connaît les puissances de M et de N.

Attention: Les puissances de N ou de M peuvent ne pas être données par la même formules pour toutes les valeurs de la puissance. Il faut alors découper la somme avant de pouvoir remplacer la puissance par sa formule explicite.

Ceci est souvent utilisé avec des matrices: $A = (\alpha I + N)$ où N^kest nulle à partir de $k = 2$ ou 3. Il ne reste alors dans la somme que les termes pour lesquels la puissance de N est 0,1 et 2, que l'on écrit explicitement.

Valeur propre :

Ceci est au programme de seconde année.

Une *valeur propre* de A est: un réel λ tel que l'équation $A.X = \lambda X$ (où X est une colonne) ait d'autres solutions que $X = 0$. Cela peut se réécrire $(A - \lambda I).X = 0$. On cherche les solutions X. La résolution demande de distinguer suivant les valeurs de λ.

Si X est colonne propre associée à λ, $A \cdot X = \lambda X$, $A^2.X = A(A.X) = A.(\lambda X) = \lambda(A.X) = \lambda^2 X$, etc.

Donc si A vérifie une relation polynomiale $P(A) = 0$, si λ est une valeur propre de A et X une colonne propre associée, en multipliant la relation par X on obtient $P(\lambda).X = 0$. Et comme une colonne propre est non nulle (et que $P(\lambda)$ est un réel), $P(\lambda) = 0$. On en déduit les valeurs propres *possibles* de A. Il n'y a plus alors qu'à vérifier qu'elles sont (ou non) valeurs propres.

Ecriture matricielle : Il faut savoir réécrire les *systèmes d'équations* sous forme de produit matriciel.

De tels systèmes d'équation peuvent provenir de la formule des probabilités totales.

On en retrouve aussi dans les suites récurrentes linéaires.

Exercice 1 :

Soit pour tout n entier, $u_{n+3} = 2.u_{n+2} + u_{n+1} - 2.u_n$.

On note V_n la matrice colonne des $[u_n, u_{n+1}, u_{n+2}]$.

Déterminer une matrice M telle que pour tout $n, V_{n+1} = M.V_n$.

Déterminer α, β et γ tels que $M^3 + \alpha M^2 + \beta M + \gamma I = 0$.

Montrer que *si* r est valeur propre *alors* $r^3 + \alpha r^2 + \beta r + \gamma = 0$.

En déduire les valeurs propres de M et des colonnes propres associées.

Montrer que M est diagonalisable; calculer ses puissances.

En déduire la valeur de u_n en fonction de u_0, $u_1$et u_2.

Exercice 2 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Déterminer α et β tels que $A^2 = \alpha.A + \beta.I$.

Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, il$ existe des réels $a_n$et $b_n$tels que: $A^n = a_n A + b_n I$.

Montrer que pour tout $n, a_{n+2} = \alpha.a_{n+1} + \beta a_n$. En déduire la valeurs de A^n en fonction de n.

Exercice 3 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer les puissances de $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

En déduire A^npour $n \in \mathbb{N}$.

Vérifier que cette formule donne pour $-n$ l'inverse de A^n.

10 INTEGRALES:

Définition :

La définition d'une intégrale dépend de la nature de la fonction et de l'intervalle sur lequel on la calcule. Pour une fonction continue sur un segment (bornes finies) elle est définie à partir d'une primitive.

Primitives usuelles :

Il faut vérifier que l'on est sur un intervalle où la primitive est valable.

pour $n \in \mathbb{N}^*, f(x) = 1/x^n, \quad F(x) = -(n-1)/x^{n-1}$sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

$f(x) = \tan(x), \quad F(x) = \ln(\cos(x))$ sur ...

$f(x) = u'(x)/u(x), \quad F(x) = \ln|u(x)|$ sur ...

$f(x) = u'(x).g(u(x)), \quad F(x) = G(u(x))$ sur ...

Exemple: $f(x) = x.e^{-x^2}, \quad F(x) = -1/2.e^{-x^2}$

Calcul :

On peut déterminer directement une primitive. (fonctions polynôme, sin, cos). On peut aussi faire apparaître une partie de primitive, dériver, compenser et recommencer (tâtonner).

On peut faire disparaître une partie embêtante en intégrant par parties (en dérivant un ln par exemple)

On peut faire apparaître des expressions sympathiques: $\dfrac{x}{2x+1} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2x+1-1}{2x+1} = \dfrac{1}{2} \cdot \left(1 - \dfrac{1}{2x+1}\right)$

On peut effectuer un changement de variable (là, il faut du flair). Symboliquement, on effectue le remplacement aux bornes, dans le dt et dans la fonction. Suivant le sens dans lequel on fait le changement de variable, il y a une difficultés ou bien dans les bornes, ou bien pour faire apparaître $u'(t)dt$ et $f(u(t))$.

Encadrement :

Pour obtenir une inégalité sur une intégrale que l'on ne sait pas calculer, le plus courant est d'encadrer d'abord la fonction puis d'intégrer cet encadrement. Le problème étant de bien choisir l'encadrement.

Si $a \leq b$ (les bornes de l'intégrale), et si pour tout x de $[a, b]$ (l'intervalle d'intégration) $f(x) \leq g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

En particulier si $g(x) = k$ est une constante, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b k.dt = k(b-a)$.

Classiques: Pour obtenir un majorant de l'intégrale en $1/(n+1)$, on majore la fonction par $cst.x^n$, puis l'intégrale (primitive) donne le $1/(n+1)$

L'encadrement permet d'obtenir ensuite la limite de l'intégrale.

Relation de récurrence :

On obtient souvent des relations de récurrence entre intégrales en intégrant par parties.

Classiques: En primitivant x^n (par rapport à x), on obtient x^{n+1}.

Hors programe à présent : En primitivant deux fois $\cos(x)$ on réobtient $\cos(x)$. En dérivant $\tan(x)$ on obtient $1 + \tan(x)^2$qui donne $\tan(x)^2$.

Exercice 1 : Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \cos(\pi x) dx$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. Déterminer une relation de récurrence liant I_{n+2} et I_n. Calculer $I_n$pour $n = 0, 2, 4$ et 6. Conjecturer puis déterminer I_n en fonction de n.

Dérivées :

Si $\int_a^b f(t)\, dt$ existe, $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ est continue sur $[a, b]$ et C^1 là où f est continue. $F' = f$