Mémento de probabilités discrètes

par Pierre Veuillez

Préalables :

Passer du temps pour avoir en tête toutes les données de l'énoncé : signification des notations et conditions de l'expérience.
Prendre des notations adaptées et standard : majuscules pour les événements et les variables aléatoires, minuscules pour leurs probabilités.
Quand il y a répétition de l'expérience, noter en indice le numéro de l'expérience.

Traduction

Formalisation de la langue :

Tous, aucun, jamais, toujours, le premier : $\bigcap$ la probabilité est le produit des probabilités (indépendants) conditionnés par les précédents (en général)
$\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N} A_k\right)\right)$
au moins un, ou : $\bigcup$ la probabilité est la somme ou la somme de la série (incompatible) le crible (petites réunions) ou l'événement contraire.
si A alors B : $A \subset B$ et $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$
Si A : on parle alors de probabilités conditionnelle sachant A.

Concrétisation :

les probabilités conditionnelles se calculent le plus souvent par traduction du conditionnement.
On reconnaît alors souvent une loi usuelle, ou bien une même situation avec un décalage.
Ce n'est que lorsque l'on ne peut pas que l'on passe par la formule de Bayes.

Les situations usuelles :

Espérance

$E(X) = \sum_{k\in X(\Omega)} k\mathrm{P}(X=k)$ ou somme de série si convergence absolue.
$E(f(X)) = \sum_k f(k)\,\mathrm{P}(X=k)$ si convergence absolue (théorème de transfert)
$E\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i E(X_i)$ si chacune existe (cf Bernouilli)
$E(f(X,Y)) = \sum_i \sum_j f(i,j)\,\mathrm{P}(X=i\cap Y=j)$ si convergence absolue
$E(X\cdot Y) = E(X)\,E(Y)$ si indépendants.
$V(aX+b) = a^2V(X)$ et $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$ si indépendants.

Quand l'expérience se déroule en deux temps,

et que les conditions du second temps dépendent du résultat du premier.
En particulier quand le second temps dépend de la valeur d'une variable aléatoire définie dans le premier temps !
En particulier quand on reconnaît une loi usuelle, à condition de connaître le résultat du premier temps.

Probabilités totales

On donne comme système complet d'événement tous les résultats possibles du premier temps, (typiquement, $(N = n)_{n\in\mathbb{N}^*}$) et on applique la formule des probabilités totales (**indexée par le système complet**)

Loi marginale

On détermine la loi du couple puis on a la loi de l'une comme loi marginale en sommant sur l'autre paramètre

Quand l'expérience suivante dépend du résultat précédent : $C_{n+1} = M \cdot C_n$

Le SCE est formé des résultats possibles à l'étape n.
Leurs probabilités sont mises en matrice colonne C_n
On applique les probabilités totales pour la probabilité de chacun des valeurs suivantes.
Et on écrit la matrice colonne des résultat sous forme de produit matricielle $C_{n+1} = M \cdot C_n$.
L'**espérance** -qui est une somme de produit- peut aussi s'écrire en produit ligne des valeurs *colonne.des probabilités.

Quand on répète une même expérience à deux issues (échec ou succès)

le rang X du premier succès est donné

- par une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ si on fait une **suite** (infinie) d'expériences **indépendantes** qui ont toutes la même probabilité p de succès
- par une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ si le rang du premier succès est **sans mémoire** (tant que l'on a échec, la probabilité de succès reste la même : p)
- dans les autres cas, par $(X = k) = \bigcap_{i=1}^{k-1} E_i \cap S_k$ et suivant que les expériences sont indépendantes ou non, la probabilité sera le produit des probabilités ou la formule des probabilités composée.

le nombre X de succès est donné

- par une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ si$X$ est le **nombre de succès** en un nombre entier n (**fixé**, pas une variable aléatoire) d'expériences **indépendantes** et ayant toutes la **même probabilité de succès** p.
- par une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$si X est le **nombre de résultats favorables** succès en n tirages **simultanés** ou **successifs sans remise** parmi N objets équiprobables dont la proportions de favorables est p.
- par des variables de **Bernouilli**

  si X_i compte le nombre de succès lors de la $i^{ème}$ expérience (0 ou 1 succès) alors $\sum_{i=1}^{n} X_i$ donnera le nombre total de succès en n expériences.

  Elles permettent d'avoir facilement l'espérance (mais pas la loi)
- Erreur : le nombre d'expérience avant le premier succès se rapporte au premier succès et non pas au nombre d'échec.
- Erreur : Si le nombre d'expérience est donné par une variable aléatoire N, on ne retrouve la loi usuelle que sur les probabilités sachant $N = n$.

Lois usuelles :

Géométrique

$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ si $X(\Omega) = [[1, +\infty[[$ et pour tout $k \in [[1, +\infty[[$: $\mathrm{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p$
$E(X) = \frac{1}{p}$ et $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$
à noter : $\mathrm{P}(X > k) = (1-p)^k$ (que des échecs jusqu'à k)

Bernouilli

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$ si $X(\Omega) = \{0; 1\}$ et $\mathrm{P}(X = 1) = p$
$E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$
à noter : une somme de variable de Bernouilli est le nombre total de succès.

Binomiale

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ si si $X(\Omega) = [[0, n]]$ et pour tout $k \in [[0, n]]$: $\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
$E(X) = n\,p$ et $V(X) = np(1-p)$
à noter : Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ **indépendantes** de **même paramètre** de succès p alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n + m, p)$.

Poisson

$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha)$ si si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mathrm{P}(X = k) = \frac{e^{-\alpha}\alpha^k}{k!}$
$E(X) = \alpha$ et $V(X) = \alpha$
à noter : Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\beta)$ **indépendantes** alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha + \beta)$.

Hypergéométrique

$X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$ avec $a = Np$ (nombre de favorables) et $b = n(1-p)$ nombre de défavorables
$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ pour tout $k \in [[\max(0, n-b); \min(a, n)]] = X(\Omega)$ les bornes se retrouvent par les conditions sur les coefficients du binôme. ($0 \leq k \leq a$ et $0 \leq n - k \leq b$)
$E(X) = n\,p$ comme pour la loi binomiale.

Uniforme

$X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[[1,n]]}$ si $X(\Omega) = [[1, n]]$ et pour tout $k \in [[1, n]]$: $\mathrm{P}(X = k) = \frac{1}{n}$
$E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$
à noter : Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[[a,b]]}$ ((valeurs de $[[a, b]]$ équiprobables) alors $Y = X - a + 1 \hookrightarrow \mathcal{U}_{[1,b-a+1]}$ ce qui permet de calculer son espérance $\frac{a+b}{2}$ et sa variance.

Approximations

- Convergence en loi (les probabilités données par une loi tendent vers celles données par une autre)

  $\mathcal{H}(N, n, p) \to \mathcal{B}(n, p)$ quand $N \to +\infty$

  $\mathcal{B}(n, \alpha/n) \to \mathcal{P}(\alpha)$ quand $n \to +\infty$

- Approximation : $\mathcal{H}(N, n, p) \simeq \mathcal{B}(n, p) \simeq \mathcal{P}(np)$ (tous de même espérance)

- Inégalité Bienaymé-Tchebichev $\mathrm{P}(|X - m| > \varepsilon) \leq \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$ avec $m = E(X)$ et si X a une espérance et une variance.

- Loi faible des grands nombres : les X_i de même loi ayant une espérance m et une variance alors $\mathrm{P}\left(|M_n - m| > \varepsilon\right) \to 0$ quand $n \to +\infty$

Programmation

Compteur

un compteur, est initialisé à 0 avant les boucles : `c:=0;` et il est augmenté de 1 chaque fois qu'il le faut : `c:=c+1;`

Accumulateur

Un accumulateur est initialisé à 0 (sommes) ou 1 (produit ou puissance) et il est augmenté (somme) ou multiplié (produit)de la quantité à chaque fois `S:=S+?;` ou `P:=P*?;`

Tirage

`randomize;` initialise le générateur de nombre aléatoire.
`random;` donne un nombre au hasard de [0,1[suivant une loi uniforme.
N.B. `(random<x)` a une probabilité de x pour tout $x \in [0,1]$
N.B. `(x<random<x+y)` a une probabilité de y pour tout x et $x+y \in [0,1]$
`random(a);` donne un nombre aléatoire de l'intervalle [0,a[si a est un réel ou de [[0,a-1]] si a est un entier, suivant une loi uniforme
N.B. Pour simuler un lancer de dé : `D:=randomize(6)+1` (dans [[0,5]]+1 donc dans [[1,6]])
Pour avoir un événement de probabilité 0,28 : `if (random<0,28) then...`

Rang du premier succès, nombre de succès, total des résultats.

Pour obtenir le rang du premier succès, on a besoin d'un **compteur** pour le nombre d'expérience, et de **répéter** l'expérience **jusqu'à** obtenir le succès.
Pour obtenir en plus la somme des résultats du dé, on utilise un **accumulateur** de somme.
Pour connaître le nombre de 2 obtenus entre temps, il faut un second compteur.

```
var c,c2,S,D:integer;
begin
randomize
c:=0;S:=0;c2:=0;
repeat
     D:=random(6)+1;
     c:=c+1;S:=S+D;
     if (D=2) then c2:=c2+1;
until D=6;
writeln(c,' ',S,' ',c2)
end.
```