Sommes et séries

1 Synthèse sommes finies

Définitions $\sum_{k=a}^{b} u_k$ est défini pour $a \leq b$; $\sum_{k=a}^{b} u_k = u_a + u_{a+1} + \cdots + u_b$ pour les petites sommes.
$\sum_{k=0}^{n+1} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + u_{n+1}$ et $\sum_{k=0}^{0} u_k = u_0$ pour les récurrences.

1.1 Opérations

Chasles (découpage horizontal) Valable uniquement si toutes les bornes sont en ordre croissant !

Linéarité (découpage vertical) Somme de sommes.

Factorisation des constantes par rapport à l'indice de sommation.

Réindexation Change les deux bornes et le contenu. Mais ce n'est pas le meilleur moyen pour rectifier les bornes.
Pour $x \neq 1$, calculer $(1-x)\sum_{k=0}^{n} kx^k$ et en déduire $\sum_{k=0}^{n} kx^k$.

Dérivation Pour les sommes finie ! $x \to x^0$ se dérive en $x \to 0$.
Calculer $\sum_{k=1}^{n} k \cdot x^{k-1}$

Simplification diagonale Il faut avoir exactement $\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k = u_{n+1} - u_0$

Inégalités Montrer que pour tout $k \geq 2$: $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ en déduire un majorant de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

1.2 Sommes usuelles

$\sum_{k=a}^{b} 1 = b - a + 1$ si $b \leq a$
$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$; $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

pour $a \leq b$: $\sum_{k=a}^{b} q^k = \begin{cases} b-a+1 & \text{si } q = 1 \\ q^a \frac{1-q^{b-a+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$

1.3 Méthodes

Constantes si elles sont en facteur ! $\sum_{k=0}^{n} 2k + 1$

Borne supérieure $\sum_{k=0}^{n+2} k^2$

Borne inférieure $\sum_{k=3}^{n} k^2$

Puissance manquante $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

Puissance en puissance k $\sum_{k=0}^{n} q^{2k}$

Puissance en produit par une constante $\sum_{k=0}^{n} q^{k+1}$

Produit en puissance $\sum_{k=0}^{n} 2^k \cdot 3^k$

Produit en somme $\sum_{k=0}^{n} (k+1)(k+2)$

Binôme Où doit on retrouver l'indice de sommation ? Où retrouve-t-on la puissance ? Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k+1}$
Ecriture factorielle de $\binom{n}{k}$ uniquement si $0 \leq k \leq n$.
$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ uniquement si $n \geq 0$
Transformation du coefficient : symétrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, Pascal $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, par factorielle $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$

Formule changeante Jusqu'à un indice (apparaît souvent en probabilités) $\sum_{k=0}^{3n} |n-k|$.
Suivant la parité$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} k^2$: $\sum_{k=0}^{2n} k(-1)^k$

1.4 Sommes doubles

Basiques Distinguer variables et constantes. $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} i \cdot j$

Permutation de sommes $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n}$ somme pour tous les couples d'entiers (i,j) tels que :
$1 \leq i \leq n$ et $i \leq j \leq n$; que l'on regarde comme $1 \leq i \leq j \leq n$;
puis mettre j en premier $1 \leq j \leq n$ et $1 \leq i \leq j$; pour trouver $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j}$
Calculer $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$

2 Cours séries

2.1 Définition

Série notée $\sum_{k\geq 1} u_k$: série de terme général $(u_k)_{k\geq 1}$ et de premier indice 1.

Série convergente signification ?

Somme de la série notée $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ est ?

Aboslue convergente Si elle est absolument convergente alors elle est convergente.
Contre exemple ?
Intérêt : critères de convergence.

2.2 Usuelles

Géométriques et dérivées Convergent si $|q| < 1$ et divergent sinon.
$\sum_{k=0}^{++\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$: $\sum_{k=1}^{++\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$:
$\sum_{k=2}^{++\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$
: $\sum_{k=0}^{++\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}$: $\sum_{k=0}^{++\infty} k^2q^k = \frac{q(q+1)}{(1-q)^3}$

Exercice Démontrer les deux premières.

Exponentielles convergent $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

Classique $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} \frac{2^k}{n!}$ ressemble à une somme binomiale mais ...

Riemann $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.

2.3 Opérations

Méfiance Chercher l'erreur :
$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k = 2^0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2^k = 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{k-1} = 1 + 2\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k$
Donc $(1-2)\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k = 1$
et $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k = -1$ somme de termes positifs !
Conclusion ? ....
....
Prudence : on repart de la somme partielle.

2.4 Critères de convergence pour les séries à termes positifs.

Rappel Une suite croissante et .... est convergente,
une suite croissante et non ....tend vers $+\infty$.

Lemme Une série à termes positifs est croissante. (Signification ? Le démontrer).
Que peut-on en déduire suivant qu'elle est majorée ou non.

Théorème Si pour tout $k \geq 0 : 0 \leq u_k \leq v_k$ alors
si $\sum_{k\geq 0} v_k$ converge alors $\sum_{k\geq 0} u_k$ converge (par majoration de termes positifs)
si $\sum_{k\geq 0} u_k$ diverge alors $\sum_{k\geq 0} v_k$ diverge (par minoration de termes positifs)

Preuve Les sommes partielles vérifient les mêmes inégalités.
Puis on a convergence ou divergence par minoration ou majoration.

Théorème Si $v_n \geq 0$ et $u_n \geq 0$ et que $u_n = o(v_n)$ alors
si $\sum_{k\geq 0} v_k$ converge alors $\sum_{k\geq 0} u_k$ converge (par majoration de termes positifs)
si $\sum_{k\geq 0} u_k$ diverge alors $\sum_{k\geq 0} v_k$ diverge (par minoration de termes positifs)

Preuve Que signifie $u_n = o(v_n)$? et il existe un rang n_0 à partir duquel $0 \leq u_n/v_n \leq 1$ et $u_n \leq v_n$.
On est alors ramené au théorème précédent.

Théorème Si $u_n \sim v_n$ et que $v_n \geq 0$ alors $\sum_{k\geq 0} u_k$ converge si et seulement si $\sum_{k\geq 0} v_k$ converge. (par équivalence de termes positifs)

Preuve Que signifie $u_n \sim v_n$? et il existe un rang n_0 à partir duquel $\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3}{2}$ d'où $\frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n$ et la convergence ou la divergence par application du premier théorème.

Méthode Un équivalent est une série de référence.
Sinon, on fait apparaître un terme qui tend vers 0 fois une série de référence.

Exercice Montrer que la série de terme général $\left((-1)^k \ln(k) \cdot e^{-k}\right)_{k\geq 1}$ converge.