Mémento suites

par Pierre Veuillez

1 Suites usuelles.

Reconnaître le type de suite puis résoudre.
N.B. les coefficients doivent être constants par rapport à n

1.1 Arithmétique.

$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n + r$ pour tout $n \geqslant n_0$ alors $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)\, r$

1.2 Géométrique

$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = q \cdot u_n$ pour tout $n \geqslant n_0$ alors $u_n = u_{n_0} + q^{(n-n_0)}$

1.3 Arithmético-géométrique .

$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = q \cdot u_n + r$
On doit d'abord résoudre $c = q \cdot c + r$ puis on fait le changement de suite $v_n = u_n - c$ dont on constate qu'elle est géométrique. D'où la valeur de v_n puis celle de u_n

1.4 Récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants

$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+2} = a \cdot u_{n+1} + b \cdot u_n$
Soit $(E) : x^2 = ax + b$ l'équation caractéristique.

Théorème

- si (E) a deux racines distinctes α et β $(\Delta > 0)$alors il existe des constantes A et B telle que pour tout entier $n : u_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$
- si (E) a une seule racine α $(\Delta = 0)$ alors il existe des constantes A et B telle que pour tout entier $n : u_n = (A + nB) \cdot \alpha^n$
- si (E) n'a pas de racine : hors programme.

On détermine les valeurs de A et B en écrivant la relation pour u_0 et u_1

1.5 Factorielle (coefficients non constants)

$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = (n + 1) \cdot u_n$ et $u_0 = 1$ alors $u_n = n!$

2 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

2.1 Outils sur les suites

2.1.1 Croissante

Défintion une suite est croissante si pour tout entier n : $u_{n+1} \geqslant u_n$.

Démonstration par récurrence avec le sens de variation de f sur I ou par le signe de $f(x) - x$ sur I
(il faut savoir que les termes de la suite se trouvent sur I).

2.1.2 Majorée

Définition une suite est majorée s'il existe une **constante** M telle que pour tout entier n : $u_n \leqslant M$

Démonstration par récurrence avec le sens de variation de f.

2.1.3 Convergence

Théorème une suite croissante et majorée est convergente.

2.1.4 Divergente

Théorème une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.

Démonstration pour montrer la non majoration, on raisonne par l'absurde.

2.1.5 Inégalité

Théorème si pour tout entier n : $u_n < M$ et que u a une limite ℓ alors $\ell \leqslant M$
N.B. les inégalités s'élargissent à la limite

Utilisation pour situer la limite, on situe les termes de la suite.

2.1.6 Limite

Théorème si $|k| < 1$ alors $k^n \to 0$ quand $n \to +\infty$

Utilisation avec l'IAF.

2.2 Outils sur les fonctions

2.2.1 Croissance

Défintion f croissante sur I signifie que
si x et y appartiennent à I alors : si $x \leqslant y$ alors $f(x) \leqslant f(y)$

Utilisation dans les récurrence **si** on sait déjà que u_n et u_{n+1} appartiennent à I, **sinon**, on le rajoute dans l'hypothèse de récurrence

- $a \leqslant u_n \leqslant b$ alors $f(a) \leqslant f(u_n) \leqslant f(b)$ et $a \leqslant f(a) \leqslant u_{n+1} \leqslant f(b) \leqslant b$
- $u_n \leqslant u_{n+1}$ alors $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$ et $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$

2.2.2 Continuité

Définition f continue en ℓ signifie que $f(x) \to f(\ell)$ quand $x \to \ell$

Utilisation Théorème : si $u_n \to \ell$ et que f est continue en ℓ alors $f(\ell) = \ell$ (ℓ est une solution de $f(x) = x$)
Pour savoir que f est continue en ℓ, on situe ℓ.
S'il y a plusieurs solutions, on procède par élimination en situant ℓ dans un intervalle.

2.2.3 Signe de $f(x) - x$

Méthodes S'obtient par factorisation ou par étude des variations et théorème de bijection pour $f(x) - x = 0$ (ou par résolution).
Attention $f(x) = x$ ne se résout pas par bijectivité de f.

Utilisation la limite ℓ est solution de $f(x) = x$ si f est continue en ℓ via u_n.

Utilisation $f(x) \leqslant x$ sur I et **si** $u_n \in I$ (à démontrer au préalable) alors $f(u_n) \leqslant u_n$ et $u_{n+1} \leqslant u_n$ sans récurrence.

2.2.4 Inégalité de accroissements finis

Théorème si f est dérivable sur I et que $|f'| \leqslant k$ sur I et que x et $y \in I$
alors $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$

Utilisation α solution de $f(x) = x$. On vérifie **d'abord** que α et $u_n \in I$ et on a alors
$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant k|u_n - \alpha|$ soit $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant k|u_n - \alpha|$;
d'où, par récurrence $|u_n - \alpha| \leqslant k^n |u_0 - \alpha|$
et par encadrement $(0 \leqslant |u_n - \alpha|)$ $u_n - \alpha \to 0$ et $u_n \to \alpha$

2.3 Programmation

2.3.1 Affectation

On affecte successivement tous les termes de la suite dans une même variable `u:=f(u)`

2.3.2 Une fonction

$f(x) = e^x - 1/x$ est programmée par

```
function f(x:real):real;
begin f:=exp(x)-1/x end;
```

2.3.3 Condition d'arrêt.

- par l'indice : `u:=u0 ; for i:=1 to n do u:=f(u) ;`
- par l'IAF : $|u_n - \alpha| \leqslant k^n$ déterminer une valeur approchée de α à ε près, se programme :
  `u:=u0 ; P:=1 ; repeat u:=f(u); P:=P*k until P<=eps;`
- par bijection : $g(x) = f(x) - x < 0$ avant α et $g(x) > 0$ après α.
  u_n donnera une valeur approchée à ε près si $u_n \leqslant \alpha < u_n + \varepsilon$ (testé sur $g(x)$)
  se programme `repeat u:=f(u) until g(u+eps)>0;`

3 Suites implicites $f_n(u_n) = 0$

Méthodes On ne connaît pas u_n mais seulement son image $f_n(u_n)$.
On a l'existence et l'unicité de u_n par bijectivité.
On prouve les propriétés de u_n en passant par les images.

3.1 Outils sur les fonctions.

3.1.1 Bijection.

Préciser que 0 appartient à l'intervalle image pour conclure que l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution

3.1.2 Croissance stricte

Théorème si f est strictement croissante sur I et que x et $y \in I$ alors
$f(x) \leqslant f(y) \Longleftrightarrow x \leqslant y$ (si $f(x) \leqslant f(y)$ alors $x \leqslant y$)

Utilisation pour comparer u_n et u_{n+1} à partir de leurs images.

3.1.3 Comparaison

Méthode on compare $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$ par factorisation de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.

3.2 Etude de u_n

Sens de variation On compare les images de u_n et u_{n+1} par la même fonction :
$f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ sur I et $u_n \in I$ alors $f_n(u_n) \leqslant f_{n+1}(u_n)$.
Or $f_n(u_n) = 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$ donc $f_{n+1}(u_{n+1}) \leqslant f_{n+1}(u_n)$.
Et comme f_{n+1} est décroissante sur J et que u_n et u_{n+1} en sont éléments, $u_{n+1} \geqslant u_n$
Sans récurrence !

Limite Existe par monotonie et encadrement, majoration ou minoration ; la nommer.
On passe à la limite dans $f_n(u_n) = 0$ (arpès transformations éventuelles)

3.3 Dans le cas $f(u_n) = n$,

On peut aussi utiliser la réciproque.

Théorème f continue et strictement croissante sur $I = [a, b]$ alors elle est bijective de I dans $J = [f(a), f(b)]$.
Elle a alors une réciproque f^{-1} qui est continue et strictement croissante de J dans I.

Propriétés de f "par symétrie" (limite, asymptote, tangente) en inversant les rôles des abscisses et des ordonnées.

Utilisation Vérifier que $n \in J$ puis : $u_n = f^{-1}(n)$ dont on connaît les propriétés par symétrie.