Mémento variables à densité

par Pierre Veuillez

De la densité à la variable aléatoire :

Probabilité

- f est une densité si f est continue sauf en un nombre fini de points, positive et $\int_{-\infty}^{+\infty}.f(t)\,dt = 1$

Revoir le calcul des intégrales impropres.

- La fonction de répartition de X est $F(x) = p(X \leq x)$
- Pour une variable X de densité f on a
  - pour tout $x \in \mathbb{R}$: $p(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$
  - pour tout $x \in \mathbb{R}$: $p(X > x) = 1 - F(x) = \int_{x}^{+\infty} f(t)\,dt$
  - **si** $a \leq b$ alors $p(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(t)\,dt$ et vaut 0 si $a > b$

Quand f est données par différentes formules suivant l'intervalle, on obtient une formule différente sur chaque intervalle.

Espérance

Pour une variable X de densité f,

- X a une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty}.tf(t)\,dt$ converge. On a alors $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}.tf(t)\,dt$
- X a une variance si X a une espérance et si $\int_{-\infty}^{+\infty}.t^2 f(t)\,dt$ converge.
  On a alors $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty}.t^2 f(t)\,dt$
- Pour une variable X de densité f, et g continue sauf en un nombre fini de points, $Y = g(X)$ a une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty}.g(t)\,f(t)\,dt$ est absolument convergente et on a alors $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty}.g(t)\,f(t)\,dt$

De la variable à la densité :

Si F est une fonction de répartition (i.e. $F(x) = p(X \leq x)$),

Elle est la fonction de répartition d'une variable à densité si et seulement si : elle est continue et de classe C^1 sauf en un nombre fini de points
La densité est alors $f = F'$ là où F est dérivable.
Pour montrer qu'une fonction est continue :

- somme, produit ... de fonctions continues.
- Là où ces théorèmes ne s'appliquent pas (quand la formule change dépend de l'intervalle) f est continue en a si $f(x) \to f(a)$ quand $x \to a$

Pour montrer qu'une fonction est C^1; on reste formel autant que possible, et
La somme, composées ... de fonction C^1 est C^1

Quand une V.A. Y est définie à partir d'une autre $Y = f(X)$,

Pour déterminer la fonction de répartition de Y on résout $G(x) = \mathrm{P}(f(X) \leq x)$ pour exprimer la fonction de répartition de Y en fonction de celle de X.
La fonction de répartition de X vérifie les critères de fonction de répartition de variable à densité.
Puis on vérifie les 2 critères (continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sauf en un nombre fini de points) et on dérive enfin.
Il ne faut pas chercher à revenir aux intégrales, mais rester formel.

Interprétation.

Pour les lois de min et max on procède par :

- le plus petit est plus grand que x s'ils sont tous plus grand que x (intersection)
  (ECRICOME 2003)
- le plus grand est plus petit que x s'ils sont tous plus petits que .x.

Pour une durées de fonctionnement X

il faut interpréter : (voir **ECRICOME 2001**)

- $X \geq t$ signifie que la machine fonctionne (encore) à l'instant t.
- $X < t$ signifie qu'elle est en panne à l'instant t.
- Le nombre de machine en panne à un instant donné suivra souvent une loi binomiale (revoir les conditions , l'espérance et la variance)

Pour la partie entière,

comme elle ne prend que des valeurs entières, on n'étudie plus la fonction de répartition mais directement la loi (exo 22 feuille)

- on a $[X] \leq X < [X] + 1$ et ou encore $([X] = n) = (n \leq X < n + 1)$
- Les inégalités sur la partie entière se manipulent de façon beaucoup moins naturelle : à éviter (ce n'est pas une fonction strictement croissante) :
  $([X] \leq x) = (X < [x] + 1)$ et $(x \leq [X]) = ([x] - 1 < X)$

Lois usuelles : connaître les densités, espérances et variances.

- pour la loi exponentielle caractérisée par le fait qu'elle est sans mémoire.
- pour la loi Normales, référer le changement de variable et la convergence de la somme centrée réduite de variables indépendantes de même espérance et variance (rare).

  La somme ou la moyenne S de variables d**e même loi**, d'espérance m et de variance v, **centrée réduite** converge en loi vers la loi $\mathcal{N}(0,1)$: $S^* = \dfrac{S-m}{\sqrt{v}} \widetilde{\hookrightarrow} \mathcal{N}(0,1)$ c'est à dire que $\mathrm{P}(\mathcal{S}^* \leq x) \simeq \Phi(x)$