

Memento diagonalisation

par Pierre Veuillez

f endomorphisme associé à M dans une base. La matrice dépend de la base !

Lien entre f et sa matrice

- Pour trouver M , calculer les images par f des vecteurs de \mathcal{B} , puis leurs coordonnées **dans** \mathcal{B} .
- Quand on a la formule de f , écrire, pour tout vecteur u , les coordonnées de $f(u)$ sous la forme $Matrice \cdot U$ où U sont les coordonnées de u .
On prouve ainsi que f est l'application linéaire associée à $Matrice$ donc qu'elle est linéaire.
- Quand on a la matrice M de f , on a les coordonnées de $f(u)$ par $M \cdot U$ où U contient les coordonnées de u .
- Quand on a la matrice de f dans une base B et dans une base C , **on en déduit** la relation :
$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(C) \text{mat}_{\mathcal{C}}(f) \text{mat}_{\mathcal{C}}(B)$$

(Il est rare que l'on utilise cette relation pour trouver la matrice de f)

Pour montrer que α est valeur propre

- Définition : chercher ou donner directement $u \neq 0$ tel que $f(u) = \alpha u$ ou $(f - \alpha Id)(u) = 0$ ou encore $u \in \ker(f - \alpha Id)$
- chercher et trouver U colonne non nulle telle que $MU = \alpha U$ ou $(M - \alpha I)U = 0$
- Montrer que $f - \alpha Id$ n'est pas bijective ou montrer que $M - \alpha I$ n'est pas inversible

Pour montrer que α n'est pas valeur propre

- Si $f(u) = \alpha u$ alors $u = 0$
- $M - \alpha I$ est inversible
- la somme des dimensions des sous espaces propres est supérieure à la taille de la matrice.
- **une relation polynomiale.**

Pour trouver les valeurs propres

- Utiliser une **relation polynomiale** pour trouver les valeurs propres possibles **puis tester** ces valeurs.
- Pour u un vecteur - ou U une colonne - résoudre $f(u) = \alpha u$ ou encore $(f - \alpha Id)(u) = 0$ et si on trouve des solutions autres que $u = 0$ alors α est valeur propre.
- Donner des vecteurs propres associé à des valeurs propres, et prouver qu'il n'y en a pas d'autres (dimension)
- Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la matrice $M - \alpha I$ n'est pas inversible, en appliquant la méthode de Gauss, pour obtenir une matrice triangulaire qui sera inversible si et seulement si aucun terme de la diagonale n'est nul.
- **Si** la matrice est **triangulaire**, les valeurs propres sont les termes de sa diagonale.

Pour montrer qu'une matrice est diagonalisable

- M est symétrique (mais ne donne ni les valeurs propres ni la matrice de passage)
- Ecrire $M = PDP^{-1}$ (à partir d'une relation entre matrices)
- trouver une base de vecteurs propres de f ou de colonnes propres pour M .
- il suffit (non nécessaire) que M ait n valeurs propres distinctes
- montrer que la somme des dimensions des sous espaces propres est égale à la taille de la matrice. (la concaténation des bases des sous espaces propres forme alors une base de l'espace)

Pour montrer qu'une matrice n'est pas diagonalisable

- S'il n'y a qu'une valeur propre α possible (relation polynomiale), raisonnement **par l'absurde** :
 $M = P\alpha IP^{-1} = \alpha I$
- Déterminer les sous espaces propres et la somme des dimensions n'est pas la taille de la matrice.

Pour montrer qu'une matrice est inversible

ou que f est bijectif (isomorphisme) : **il faut que** les dimensions des espaces de départ et d'arrivée soient les mêmes.

- factoriser $I = MN$ et $NM = I$ (Cela s'obtient souvent à partir de la **factorisation de I dans une relation polynomiale**)
- montrer que la famille de ses colonnes est libre + taille.
- Remarquer que M est une matrice de passage (matrice des coordonnées des vecteurs d'une base dans une autre base)
- montrer que $\ker(f) = \{0\}$ ou que 0 n'est pas valeur propre.
- Gauss ou $MX = Y \iff X = NY$ (par résolution du système)

Pour montrer que l'on a une base

- libre et génératrice.
- Définition : $e_1, \dots, e_n \in E$ et pour tout $u \in E$ il existe des uniques $\alpha_1 \dots$ tels que $u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ (les coordonnées)
- libre + cardinal ou (plus rarement) génératrice + cardinal.
- concaténation de familles libres de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes + cardinal
- vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes + cardinal
- échelonnée + cardinal
- bases canoniques.

Pour trouver une base

- Quand l'ensemble est donné sous forme paramétré, écrire $\text{Vect}(\dots)$ puis prouver que la famille est libre.
- En résolvant un système puis en paramétrant les solutions
- base de l'image : déterminer la dimension n de l'image grâce à la dimension du noyau puis prendre l'image de n vecteurs (des vecteurs de la base) images qui, avec un peu de chance, formeront une famille libre.