Mémento Intégrales

1 Calcul de primitive

Existe si la fonction est continue sur un intervalle. Se teste en la dérivant. Constantes multiplicatives. Impossible en général avec les fonctions usuelles. Pas de produits sauf $f(u(x)) \cdot u'(x)$ dérivée du contenu.
Transformer les produits/quotient : développer en somme, regrouper en puissance ou en exponentielle, IPP

2 Relation entre intégrale

2.1 Récurrence

I_{n+1} en fonction de I_n : Par IPP en dérivant la puissance.
N.B. pour primitiver $u(x) = e^{-x^2}$ ... il faut garder un x en réserve : $u(x) = xe^{-x^2}$

2.2 Changement de variable

Indiqué par l'énoncé, ou chercher les correspondances, aux bornes et dans le contenu.
Permet de faire passer un paramètre dans les bornes pour étudier l'intégrale en fonction des bornes.
N.B. plus facile quand l'ancienne variable est fonction de la nouvelle.

3 Limite

3.1 inégalités (majoration, minoration, encadrement)

Sur le contenu d'abord, intégration de l'inégalité suivant l'ordre des bornes.
N.B. Une majoration en $\dfrac{1}{n+1}$ est obtenue par intégration de $(\cdots)^n$, qu'il faut donc conserver dans le majorant.
N.B valeur absolue $\left|\int\right| \leq \int ||$ **si** les bornes sont en ordre croissant.

3.2 Convergence d'intégrale impropre

Suivant l'énoncé :
- Convergence et calcul, intégrale partielle, primitive puis limite.
  (IPP et changement de variable sur l'intégrale partielle)
- Convergence par comparaison de fonctions positives. Factorisation du prépondérant pour obtenir un équivalent simple.
  Astuce : découper une exponentielle $x^n e^{-x} = \left(x^n e^{-x/2}\right) e^{-x/2} = o\left(e^{-x/2}\right)$
  Références : exponentielles et Riemann.

4 Fonction des bornes

Une fonction continue sur un intervalle a une primitive.
Si l'intégrale converge, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$ est continue sur $]-\infty, a]$ et C^1 là où f est continue.

5 Sommes / Séries

5.1 Bornes constantes

$$\sum_k \int_a^b f_k(t)\, dt = \int_a^b \sum_k f_k(t)\, dt \text{ (linéarité)}$$

5.2 Bornes télescopiques

$$\sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\, dt = \int_0^{n+1} f(t)\, dt \text{ (Chasles, contenu constant)}$$

5.3 Comparaison séries/intégrale

Hypothèses : f décroissante et positive sur $[1, +\infty[$ alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ sont de même nature (permet de faire des IPP)