Revisions Inégalités

$\leftarrow$ Variations

- Montrer que pour tout $x > 0$ on a $e^x > 1 + x + x^2/2$

  Corrrigé

  Si on cherche à faire disparaître l'exp, on obtient un ln ...On étudie donc les variations de la différence :

  Soit $f(x) = e^x - 1 - x - x^2/2$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x - 1 - x$ signe ...? on réétudie ses variations : $f''(x) = e^x - 1$

x	0
$f''(x) = e^x - 1$	$0 \quad \nearrow +$
$f'(x)$	$0 \quad \nearrow +$
$f(x)$	$0 \quad \nearrow +$

  Attention on a besoin des variations **et** de valeurs ou de limites pour obtenir le signe.

- Résoudre $x - 1 \leq \sqrt{x+2}$:

  Corrigé:

  On cherche à extraire le x de la racine. Pour celà on élève au carré.

  Attention : la fonction carré n'est monotonne que sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$ ... Il faut donc déterminer si les quantités élevées au carré sont **toutes deux** positives où négatives :

  Attention :avant de résoudre, il faut savoir où l'équation eslle même est définie.

  Définie pour $x \geq -2$

  - si $x - 1 \geq 0$ (i.e. si $x \geq 1$) on a $x - 1 \leq \sqrt{x+2} \Leftrightarrow (x-1)^2 \leq x + 2$ car $x - 1$ et $\sqrt{x+2}$ sont positifs.

    On repasse alors tout dans le même membre pour se ramener à une étude de signe : $\Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 \leq 0$ du second degré $\Delta = 9 + 4 = 13$ racines $\alpha = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ et $\beta = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

    Comme $13 > 9$ alors $\sqrt{13} > 3$ et $\alpha < 0$. On a $\beta > 3/2 > 1$

x	$1 \qquad \beta$
$x^2 - 3x - 1$	$- \quad 0 \quad +$

    et **pour** $x \geq 1$ les solutions sont $[1, \beta]$

    si $x < 1$ alors $x - 1 < 0$ et comme $\sqrt{x+2} \geq 0$ alors on a toujours $x - 1 \leq \sqrt{x+2}$ donc tout $x < 1$ est solution.

  - Donc les solutions sont : $[1, \beta]$

$\rightarrow$ Variations

- Etudier les variations de f : $f(x) = x - n\ln(x)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

  Corrigé :

  f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = 1 - \dfrac{n}{x}$ **pensez à** factoriser $f'(x) = \dfrac{x-n}{x}$

  n est une constante. Le nominateur est affine.Donc

x	0	n	$+\infty$
$x - n$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$		$\nearrow +\infty$

  en $+\infty$: $f(x) = x\left(1 - \frac{n\ln(x)}{x}\right) \to +\infty$ car $\ln(x) \ll x$

  Soit u définie par : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ et $f(x) = \sqrt{x+2}$.

- Résoudre $f(x) \leq x$. En déduire que la suite u est décroissante.

  Corrigé :

  Définie pour $x \geq -2$

  pour résoudre $x \geq \sqrt{x+2}$ on élève qu carré qui n'est monotonne que sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$

- si $x \geq 0$ alors $x \geq \sqrt{x+2} \Leftrightarrow x^2 \leq x+2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \geq 0$ polynôme du second degré de racine -1 et 2
  Donc ≤ 0 pour $x \in]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$ **mais** comme $x \geq 0$, alors
  $x \leq \sqrt{x+2} \Leftrightarrow x \in [2, +\infty[$
- si $x < 0$ alors comme $\sqrt{x+2} \geq 0$ il n'y a pas de solutions
- Donc pour $x \geq -2$ on a $x \leq \sqrt{x+2} \Leftrightarrow x \in [2, +\infty[$

Pour utiliser cette inégalité avec u, il faut d'abord savoir que pour tout entier n, $u_n \in [2, +\infty[$, ce que l'on fait par récurrence :

- $u_0 \geq 2$
- Soit $n \geq 0$ tel que $u_n \geq 2$ alors $u_n + 2 \geq 4$ et $\sqrt{u_n + 2} \geq \sqrt{4} = 2$
- Donc pour tout entier n, $u_n \in [2, +\infty[$

Donc comme $\sqrt{x+2} \leq x$ pour tout $x \in [2, +\infty[$ et que $u_n \in [2, +\infty[$ alors $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \leq u_n$ et la suite est décroissante.

← Factorisation

- Pour n$\in \mathbb{N}$, signe de $\ln(x)^n - \ln(x)^{n+1}$
  corrigé : $\ln(x)^n - \ln(x)^{n+1} = \ln(x)^n (1 - \ln(x))$

Pour n impair

x	0		1		e	
$\ln(x) \nearrow$		$-$	0	$+$		$+$
$\ln(x)^n$		$-$	0	$+$		$+$
$1 - \ln(x) \searrow$		$+$		$+$	0	$-$
$\ln(x)^n - \ln(x)^{n+1}$		$-$	0	$+$	0	$-$

et

Pour n pair

x	0		1		e	
$\ln(x) \nearrow$		$-$	0	$+$		$+$
$\ln(x)^n$		$+$	0	$+$		$+$
$1 - \ln(x) \searrow$		$+$		$+$	0	$-$
$\ln(x)^n - \ln(x)^{n+1}$		$+$	0	$+$	0	$-$

Attention : si la valeur où $1 - \ln(x)$ n'a pas à être démontrée (il n'y a qu'à la calculer), le signe lui doit être jusitier : par le sens de variations.

- Résoudre $x^3 - 2x^2 - 2x + 3 \geq 0$:
  Corrigé :
  1 est racine. On applique la méthode de Horner pour factoriser :

1	-2	-2	3
	1	-1	-3
1	-1	-3	0

donc $x^3 - 2x^2 - 2x + 3 = (x-1)(x^2 - x - 3)$

$x^2 - x - 3$ est du second degré $\Delta = 1 + 9 = 10$ racines : $\alpha = \dfrac{1 - \sqrt{10}}{2} < 0$ et $\beta = \frac{1+\sqrt{10}}{2} > 1$

D'où le signe :

x		α		1		β	
$x^2 - x - 3$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$x - 1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x^3 - 2x^2 - 2x + 3$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

et le solutions sont :$[\alpha, 1] \cup [\beta, +\infty[$

Attention : pensez à vérifier les positions relatives de α, 1 et β

← limites

- Soit $\varphi_k(x) = k(x-1) - xln(x)$. et $k \geq 2$ Montrer qu'il esiste ununique $a_k > 1$ tel que $\varphi_k(a_k) = 0$ et déterminer sa limite quand $k \to +\infty$
  φ_k est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi_k'(x) = k - ln(x) - 1 = k - 1 - \ln(x)$. Comme $k \geq 2$ alors $k - 1 \geq 0$ et $e^{k-1} \geq 1$

x	1		e^{k-1}		$+\infty$
$\varphi_k'(x)$		$\searrow +$	0	$- \searrow$	
$\varphi_k(x)$	0	$\nearrow$	$+$	$\searrow$	$-\infty$

- On a $\varphi_k(1) = 0$ donc $\varphi_k\left(e^{k-1}\right) > 0$
- en $+\infty$: $\varphi_k(x) = k(x-1) - xln(x) = x\ln(x)\left[-\dfrac{k}{x\ln(x)} + \dfrac{k}{\ln(x)} - 1\right] \to -\infty$

l'équation $\varphi_k(x) = 0$

- comme φ_k est strictement croissante sur $\left[1, e^{k-1}\right]$ et $\varphi_k(1) = 0$ on a donc $\varphi_k > 0$ sur $\left]1, e^{k-1}\right]$
- sur $\left]e^{k-1}, +\infty\right[$ la fonction φ_k est continue et strictement décroissante donc bijective de $\left]e^{k-1}, +\infty\right[$ dans $]\lim_{+\infty} \varphi_k ; \lim_{e^{k-1}} \varphi_k[= \left]-\infty ; \varphi_k\left(e^{k-1}\right)\right[$. Et come $\varphi_k\left(e^{k-1}\right) < 0$ alors $0 \in \left]-\infty ; \varphi_k\left(e^{k-1}\right)\right[$.
  donc l'équation a une unique solution sur $\left]e^{k-1}, +\infty\right[$.
- Finalement l'équation $\varphi_k(x) = 0$ admet une racine unique $a_k$dans l'intervalle $]1, +\infty[$. et $a_k \geq e^{k-1}$

Donc, par minoration, $a_k \to +\infty$ quand $k \to +\infty$

← **Sommes**

Montrer que pour $n \geq 2$ on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} + 1$

Corrigé :

Pour comparer les sommes, on compare les contenus :

Pour comparer $\dfrac{1}{k^2}$ et $\dfrac{1}{k(k-1)}$ on étudie le signe de leur différence :$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k(k-1)} = -\frac{1}{k^2(k-1)} < 0$ pour $k > 1$

Attention :pour faire la somme des inégalité, elles doivent être vraie **sur tout l'intervalle** de sommation.

ici, on a un problème en $k = 1$. On décopose donc le problème :

Pour tout $k \geq 2$ on a $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k(k-1)}$ donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$

et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} + 1 \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} +$

← **Intégrales**

Pour $n \in \mathbb{N}$ montrer $0 \leq \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x} dx \leq \frac{1}{n+1}$

Corrigé :pour encadrer l'intégrale, on encadre son contenu :

Attention ici on veut $\dfrac{1}{n+1}$. Il provient de la primitivation de x^n (toujours dansles exercices de concours) . Il fautdonc **conserver** ce x^n dans le majorant, et doncn'encadrer que e^{-x} :

Pour $0 \leq x \leq 1$ on a $0 \leq e^{-x} \leq e^0$ car $x \to e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ et donc $0 \leq x^n e^{-x} \leq x^n$ car $x^n \geq 0$

Donc comme $0 \leq 1$ (ordre des bornes) $\int\limits_0^1 0dx \leq \int\limits_0^1 x^n e^{-x} \leq \int\limits_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$ donc $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

$\leftarrow$ **Récurrence**

$\leftarrow$ **Inégalité des acroissements finis**

$\rightarrow$ **Probabilités**

Si deux événements vérifient $A \subset B$ alors $p(A) \leq p(B)$

$\rightarrow$ **Densité**

f est une densitée si $f \geq \dots$

$\rightarrow$ **Valeurs approchées**

Dire que $a = \alpha$ à ε près signifie que l'écart $|a - \alpha| \leq \varepsilon$.

Une telle majorationpeut êre obtenue directement par l'inégalité des acroissement finis.

On doit aussi parfois la transformer en $a - \varepsilon \leq \alpha \leq a + \varepsilon$ (on a $|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$)

Et cette dernière peut se tester par exemple sur les images si α est solution de $f(x) = 0$ et que f est strictement croissante