Corrigé Révisions Limites par Pierre veuillez

$\leftarrow$ Constantes, variables.

Quand $x \to +\infty$ de $x - n\ln(x)$ ($n \in \mathbb{N}$)

Corrigé: $x - n\ln(x) = x(1 - n\ln(x)/x)$ et comme $x \gg \ln(x)$ alors $x(1 - n\ln(x)/x) \to +\infty$

$\leftarrow$ Prépondérants, Négligeables. Factorisation; Changement de variable

- Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $e^x - \ln(2e^x - x^2)$

  Corrigé :

  On factorise d'abord à l'interrieur puis on développe le ln :

$$\begin{aligned} e^x - \ln(2e^x - x^2) &= e^x - \ln\left[2e^x\left(1 - \frac{x^2}{2e^x}\right)\right] = e^x - \ln(2) - x - \ln\left(1 - \frac{x^2}{2e^x}\right) \\ &= e^x\left[1 - \frac{\ln(2)}{e^x} - \frac{x}{e} - \ln\left(1 - \frac{x^2}{2e^x}\right)/e^x\right] \\ &\to +\infty \end{aligned}$$

- Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $e^{x^2} - x$

  Corrigé :

  On peut au choix tout rentre dans l'exp ou faire un changement de variable : $e^X \gg X$ donc $e^{x^2} \gg x^2 \gg x$

  Donc $e^{x^2} - x = e^{x^2}\left(1 - x/e^{x^2}\right) \to +\infty$

  En mettant tout en exp : $\dfrac{x}{e^{x^2}} = \dfrac{e^{\ln(x)}}{e^{x^2}} = e^{\ln(x) - x^2} = e^{-x^2\left(1 - \ln(x)/x^2\right)}$

  et enfin avec $\ln(x) \ll x^2$ on obtient $\dfrac{x}{e^{x^2}} \to 0$

- Déterminer la limite quand $x \to 1$ de $\ln(x)/(e^x - e)$

  Corrigé :

  On a une forme indéterminée.

  Attention : quand on n'est ninen 0 ni en$+\infty$, on ne dispose pas d'outils performants. On effectue donc un changement de variable :

  Soit $h = x - 1 \to 0$

$$\frac{\ln(x)}{e^x - e} = \frac{\ln(1+h)}{e^{1+h} - e} = \frac{\ln(1+h)}{e^1 e^h - e} = \frac{\ln(1+h)}{e^1(e^h - 1)}$$

  Remarque : en général pour déterminer les limites on factorise d'abord *à l'interrieur* des fonction (pour le ln , la $\sqrt{}$, les puissances) car on peut ensuite développer cette écriture ($\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}\ldots$)

  Au contraire, avec une exponentielle, on ne peut déveopper qu'une somme : $e^{a+b} = e^a e^b$

  Donc pour une FI avec exp on peut, au choix, tout écrire sous forme exponentielle puis factoriser, ou compme ici, développer le contenu de l'exp pour ensuite développer l'exp lui même.

$$\frac{\ln(1+h)}{e^1(e^h - 1)} = \frac{\frac{\ln(1+h)}{h}\ \cancel{h}}{e^1\frac{e^h - 1}{h}\ \cancel{h}} \to \frac{1}{e} = e^{-1}$$

$\leftarrow$ **Développements limités.**

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} G(t) = 0 \text{ si } t < 1 \\ G(t) = 1 - \dfrac{2ln(t)}{t^2} - \dfrac{1}{t^2} \text{ si } t \geq 1 \end{cases}$

- Montrer que G est de classe C^1sur $\mathbb{R}$

Corrigé :

- G est de classe C^1 sur $]-\infty, 1[$ et sur $[1, +\infty[$ comme somme et quotient de fonctions continues.
  En 1 on utilise le théprème de prolongement de fonction C^1 :
  - pour $x < 0$ on a $G(x) = 0 \to 0 = G(0)$ donc G est continue en 0
  - pour $x < 0$ on a $G'(x) = 0 \to 0$
  - pour $x > 0$ on a $G'(x) = -\dfrac{2}{t^3} + \dfrac{4\ln(t)}{t^3} + \dfrac{2}{t^3} \to 0$ quand $t \to 0$ (on aurait pu prendre directement $G'(1^+)$ car G est C^1 sur $[1, +\infty[$ donc la limite de G' en 1^+ est sa valeur en 1^+)

  Donc G est de classe C^1 en 1 et $G'(1) = 0$
- Soit $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. Montrer que f est dérivable en 0. Montrer que cette dérivée est continue en 0.
  Corrigé :
  On revient (pour changer un peu) au taux d'acroissement :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{\frac{x}{e^x-1} - 1}{x} = \frac{x - e^x + 1}{(e^x - 1)x} \\ &= \frac{x - (1 + x + x^2/2 + x^2\varepsilon(x)) + 1}{\left(\frac{e^x-1}{x}\right)x^2} \\ &= \frac{-(x^2/2 + x^2\varepsilon(x))}{\left(\frac{e^x-1}{x}\right)x^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{2} - \varepsilon(x)}{\frac{e^x-1}{x}} \to -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

  (remarquez ici, quel'on peut utiliser dans le même calcul à la fois le DL et les équivalents.

$\leftrightarrow$ **Equivalents. Factorisation;Changement de variable**

- Déterminer la limite quand $x \to 1$ de $\ln(x) / (e^x - e)$
- On suppose que $n\ln(n) < v_n < 2n.\ln(n)$ pour tout entier $n \geq 3$. Montrer : $\ln(v_n) \sim \ln(n)$
  Corrigé :
  On a donc $\ln(n) + \ln(\ln(n)) < \ln(v_n) < \ln(n) + \ln(2) + \ln(\ln(n))$
  et en divisant par $\ln(n) > 0$ pour faire apparaître le quotient :

$$1 + \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} < \frac{\ln(v_n)}{\ln(n)} < 1 + \frac{\ln(2)}{\ln(n)} + \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}$$

  Et par encadrement $\dfrac{\ln(v_n)}{\ln(n)} \to 1$ et donc $\ln(v_n) \sim \ln(n)$

- On a $p\left(D+I_n>\theta\right)=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1-e^{-\alpha\theta}}{1-e^{-\alpha\theta/n}}\right)$. Déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty}p\left(D+I_n>\theta\right)$

  Corrigé :

  Quand $n\to+\infty$ il y a des constantes et

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1-e^{-\alpha\theta}}{1-e^{-\alpha\theta/n}}\right)=\left(1-e^{-\alpha\theta}\right)\frac{1/n\to 0}{1-e^{-\alpha\theta/n}\to 0}$$

  On reconnait une forme e^X-1 avec $X\to 0$que l'on peut traiter par l'équivalent ou par le DL. Pour l'équivalent, on fait apparaître le quotient de la définition et on compense :

$$\begin{aligned}\left(1-e^{-\alpha\theta}\right)\frac{1/n}{1-e^{-\alpha\theta/n}} &= \left(1-e^{-\alpha\theta}\right)\frac{1/n}{-\frac{e^{-\alpha\theta/n}-1}{-\alpha\theta/n}\left(-\alpha\theta/n\right)}\\ &= \left(1-e^{-\alpha\theta}\right)\frac{1}{\frac{e^{-\alpha\theta/n}-1}{-\alpha\theta/n}\alpha\theta}\to\frac{1-e^{-\alpha\theta}}{\alpha\theta}\end{aligned}$$

  car $-\alpha\theta/n\to 0$ et que $e^X-1\sim X$

  Par le DL : $e^X=1+X+X\varepsilon\left(X\right)$ avec $\varepsilon\left(X\right)\to 0$ quand $X\to 0$ donc

$$\begin{aligned}\left(1-e^{-\alpha\theta}\right)\frac{1/n}{1-e^{-\alpha\theta/n}} &= \left(1-e^{-\alpha\theta}\right)\frac{1/n}{1-\left(1+-\alpha\theta/n-\alpha\theta/n\varepsilon_1\left(n\right)\right)}\\ &= \left(1-e^{-\alpha\theta}\right)\frac{1/n}{\alpha\theta/n+\alpha\theta/n\varepsilon_1\left(n\right)}\\ &= \frac{1/n\left(1-e^{-\alpha\theta}\right)}{1/n\left(\alpha\theta+\alpha\theta\varepsilon_1\left(n\right)\right)}=\frac{1-e^{-\alpha\theta}}{\alpha\theta+\alpha\theta\varepsilon_1\left(n\right)}\\ &\to \frac{1-e^{-\alpha\theta}}{\alpha\theta}\end{aligned}$$

$\leftrightarrow$ **Inégalités, variations.**

- Montrer que pour tout $x>0$: $f\left(x\right)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x}<0$

  Corrigé :

  f est dérivable en x tel que $1+\dfrac{1}{x}>0\Leftrightarrow\dfrac{1+x}{x}>0$ donc (signe d'un produit $\to$ tableau de signe) sur $\left]-\infty,-1\right[\cup\left]0,+\infty\right[$

$$\begin{aligned}f'\left(x\right) &= \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{x\left(x+1\right)}+\frac{1}{x^2}\\ &= \frac{-x+x+1}{x^2\left(x+1\right)}=\frac{1}{x^2\left(x+1\right)}>0 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*\end{aligned}$$

  Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

  Et comme $f\left(x\right)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x}\to 0$ en $+\infty$ alors $f<0$ sur $\mathbb{R}_+^*$

- Soit u définie par : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ et $f(x) = \sqrt{x+2}$.
Résoudre $f(x) \leq x$. En déduire que la suite u est décroissante et convergente.
Corrigé :
  - Pour $x \geq 0$ on a $\sqrt{x+2} \leq x \Leftrightarrow x + 2 \leq x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \geq 0$ polynôme du second degré qui a pour racines 2 et -1 donc (comme $x \geq 0$) les solutions sont :$[2, +\infty[$
  - Pour $x < 0$ on n'a jamais $\sqrt{x+2} \leq x$
  - Donc les solutions de $f(x) \leq x$ sont $[2, +\infty[$

  De même on obtient que $f(x) = x$ a pour (seule) solution $x = 2$
  Pour utiliser cette inégalité avec u, il faut d'abord savoir que pour tout entier n :
  $u_n \in [2, +\infty[$, ce que l'on fait par récurrence :
  - $u_0 \geq 2$
  - Soit $n \geq 0$ tel que $u_n \geq 2$ alors $u_n + 2 \geq 4$ et $\sqrt{u_n + 2} \geq \sqrt{4} = 2$
  - Donc pour tout entier n, $u_n \in [2, +\infty[$

  Donc comme $\sqrt{x+2} \leq x$ pour tout $x \in [2, +\infty[$ et que $u_n \in [2, +\infty[$ alors
  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \leq u_n$ et la suite est décroissante.
  Comme elle est minorée par 2 elle est convergente.
  Attention : on ne connait pas asa limite. On sait seulement que $\ell \geq 2$.

$\leftrightarrow$ Continuité

- Soit la suite u défnie ci-dessus. Déterminer sa limite.
Corrigé :
Comme $u_n \geq 2$ pour tout n, par passage à la limite on a : $\ell \geq 2$.
Comme f est continue sur $]-2, +\infty[$ elle est continue en ℓ et $f(u_n) \to f(\ell)$ car $u_n \to \ell$
Comme $u_n \to \ell$ alors $f(u_n) = u_{n+1} \to \ell$ et par unicité de la limite on a $f(\ell) = \ell$ et la seule solution étant $\ell = 2$ on a alors $\ell = 2$.
- Soit $f_k(x) = \dfrac{\ln(x)^k}{x-1}$ si $x \neq 1$ et $f_k(1) = 0$. Montrer que si $k \in \mathbb{N}^*$ alors f_k est continue en 1
Corrigé :
Il faut ici montrer que $f_k(x) \to f_k(1)$ quand $x \to 1$.
On a ici une forme indéterminée. On effectue donc le changement de variable $t = x-1 \to 0$ et on a :

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \frac{\ln(x)^k}{x-1} = \frac{\ln(1+t)^k}{t} \\ &= \frac{\ln(1+t)}{t} \ln(1+t)^{k-1} \end{aligned}$$

pour faire apparaître le $\ln(1+t) \sim t$ quand $t \to 0$
Donc si $k \geq 2$ alors $k - 1 \geq 1$ et $\ln(1+t)^{k-1} \to 0$ donc $f_k(x) \to 0 = f_k(1)$ donc f_k est continue en 0.
Si $k = 1$ on a alors $f_1(x) \to 1 \neq f_1(0)$ et la fonction n'ets pas continue en 1.

$\leftrightarrow$ **Séries**

- Montrer que la série $\sum_{k\geq 2} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ diverge en développant le ln

  Corrigé :
  $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$ pour $k > 0$
  Donc la somme partielle :

  $$\sum_{k=2}^{M} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{M} \ln(1+k) - \ln(k) = \ln(M+1) - \ln(2) \to +\infty$$

  quand $M \to +\infty$. Donc la série diverge.

- Déterminer un équivalent de $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$ et en déduire que la série $\sum_{k\geq 2} \ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$ converge

  Corrigé :
  Comme $\ln(1+t) \sim t$ quand $t \to 0$ et que $1/x^2 \to 0$ quand $x \to +\infty$ alors :
  $\ln(1+1/x^2) \sim 1/x^2$
  Or la série $\sum_{k\geq 1} 1/k^2$ est convergente (séries de Rieman pour $2 > 1$) donc par comparaison de séries à termes positifs $\sum_{k\geq 2} \ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$ converge également.

$\leftrightarrow$ **Intégrales impropres**

Etudier la convergence et calculer $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \ln(t)\, dt$

Corrigé :

Comme $t \to \frac{1}{t^2} \ln(t)$ est continue sur $[1, +\infty[$ cette intégrale est impropre en $+\infty$ uniquement.

Pour $M \geq 1$, on calcule $\int_1^{M} \frac{1}{t^2} \ln(t)\, dt$ en intégrant par parties :

$u'(t) = 1/t^2 : u(t) = -1/t : v(t) = \ln(t) : v'(t) = 1/t$ avec u et v de classe C^1 sur $[1, +\infty[$

On a donc

$$\begin{aligned}
\int_1^{M} \frac{1}{t^2} \ln(t)\, dt &= \left[-\frac{1}{t}\ln(t)\right]_1^M - \int_1^M -\frac{1}{t}\frac{1}{t} dt \\
&= -\frac{\ln(M)}{M} + 0 + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^M \\
&= -\frac{\ln(M)}{M} - \frac{1}{M} + 1 \\
&\to 1
\end{aligned}$$

car $M \gg \ln(M)$ quand $M \to +\infty$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \ln(t)\, dt$ converge et vaut 1

$\leftrightarrow$ **Branches infinies.**

Soit $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

- Etudier les variations de f et ses branches infinies. Tracer sa courbe représentative.
- Montrer que f est bijective de $[1, +\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.
- Montrer que sa réciproque vérifie : $f^{-1}(x) - x \to -1$ quand $x \to +\infty$

Corrigé :

- f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{1/x} - \frac{e^{1/x}}{x} \\ &= e^{\frac{1}{x}} \frac{x-1}{x} \end{aligned}$$

En $\pm\infty$ on a : $f(x) = x\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x)\right)$ en utilisant le DL de exp donc $f(x) = x + 1 + \varepsilon(x)$ et
la droite d'équation $y = 1 + x$ est asymptote à la courbe représentative de f.
En 0^- on a $f(x) = xe^{1/x} \to 0$ et pour la tangente, son semi taux d'acroissement est

$$\frac{f(x) - 0}{x - 0} = e^{1/x} \to 0$$

donc sa courbe représentative a une demi tangente horizontale en 0^-
En 0^+ on a $f(x) = xe^{1/x} \to FI$ mais avec le changement de variable $X = 1/x \to +\infty$ on a :

$$xe^{1/x} = e^X / X \to +\infty$$

car $X \ll e^X$ et on a une asymptote verticale.

x		$-$	0	$+$		1	$+$	$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$		0	$+$	
$f(x)$				$+\infty$	$\searrow$			$+\infty$
	$-\infty$	$\nearrow$	0			e	$\nearrow$	

- f est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$
donc bijective de $[1, +\infty[$ dans $[f(1), \lim_{+\infty} f[= [e, +\infty[$
- Comme f a pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = x + 1$ alors, par symétrie, la courbe représentative de f^{-1} a pour asymptote en $+\infty$ ($\lim_{+\infty} f = +\infty$) la droite d'équation $x = y + 1 \Leftrightarrow y = x - 1$. Donc $f^{-}(x) - x \to -1$ quand $x \to +\infty$

→ **Dérivablitié**

Soit $f_k(x) = \dfrac{\ln(x)^k}{x-1}$ si $x \neq 1$ et $f_k(1) = 0$. Montrer que si k est un entier $k \geq 2$ alors f_k est dérivable en 1 et déterminer sa dérivée.

Corrigé :

Pour la dérivablité en 0, on revient au taux d'acroissement : pour $x \neq 1$ on pose $h = x - 1 \to 0$

$$\begin{aligned} \frac{f_k(x) - f_k(1)}{x-1} &= \frac{\ln^k(x)}{(x-1)^2} = \frac{\ln(1+h)^k}{h^2} \\ &= \frac{\ln(1+h)^2}{h^2} \ln(1+h)^{k-2} \end{aligned}$$

Et comme $\ln(1+h) \sim h$ quand $h \to 0$ alors $\dfrac{\ln(1+h)^2}{h^2} \to 1$

- Pour $k=2$ le taux d'acroissement tend donc vers 1 donc f_2 est dérivable en 1 et $f_2'(1) = 1$
- Pour $k \geq 3$ on a $\ln(1+h)^{k-2} \to 0$ donc le taux d'accroissement tend vers 0 donc f_2 est dérivable en 1 et $f_k'(1) = 0$
- Pour $k=1$ on a

$$\begin{aligned}\frac{f_k(x) - f_k(1)}{x-1} &= \frac{\ln(x)}{(x-1)^2} = \frac{\ln(1+h)}{h}\frac{1}{h} \\ &\to +\infty\end{aligned}$$

  donc f_1 n'est pas dérivable en 1

→ **Fonctions de répartition de VADensité**

Soit $F(x) = e^x/2$ si $x \leq 0$ et $F(x) = 1 - e^{-x}/2$ si $x > 0$. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité et déterminer la densité de cette variable aléatoire. Calculer son espérance si elle en a une.

Soit X une telle varianle aléatoire et $Y = |X|$. Montrer que Y est une variable à densité et déterminer sa densité.

Corrigé :

- En $-\infty$ on a $(x < 0)$ $F(x) = e^x/2 \to 0$
- En $+\infty$ on a $(x > 0)$ $F(x) = 1 - e^{-x}/2 \to 1$
- F est continue sur $]-\infty, 0]$ (car $F(x) = e^x/2$ si $x \leq 0$) et sur $]0, +\infty[$.
  et en 0^+ : On a $F(0) = e^0$ et pour $x > 0$: $F(x) = 1 - e^{-x}/2 \to 1/2 = F(0)$
  Donc f est continue sur $\mathbb{R}$
- F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et
  $F'(x) = e^x/2 \geq 0$ si $x < 0$
  $F'(x) = e^{-x}/2 \geq 0$ si $x > 0$
- donc F est croissante sur $\mathbb{R}$

Donc F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X dont la densité est $f(x) = F'(x) = e^x/2 \geq 0$ si $x < 0$ et $e^{-x}/2 \geq 0$ si $x > 0$.

- On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction de répartition de Y qui est donnée par :

$$G(x) = p(Y \leq x) = p(|X| \leq x) = p(-x \leq X \leq x)$$

  Attention :pour passer de $p(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ il faut vérifier au préalable la condition $a \leq b$
  - Donc si $x \geq 0$ alors $-x \leq x$ et $G(x) = F(x) - F(-x)$
  - et si $x < 0$ alors $(-x \leq X \leq x) = \emptyset$ et $G(x) = 0$

  G est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$ et en 0^- : $G(0) = F(0) - F(0) = 0$ et pour $x < 0 : G(x) = 0 \to 0 = G(0)$
  Donc g est continue sur $\mathbb{R}$.
  G est C^1 sur $\mathbb{R}^*$.
  Donc Y est une variable à densité de densité g :

- $g(x) = G'(x) = 0$ si $x < 0$
- et si $x \geq 0$: $g(x) = G'(x) = f(x) + f(-x) = e^{-x}/2 + e^{-x}/2 = e^{-x}$

Donc $Y \hookrightarrow \varepsilon(1)$