Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \frac{t}{e^t+1}dt$ si $x > 0$ et $f(0) = \dfrac{1}{2}$

1. a) On construit l'inégalité :
   Pour tout $x > 0$ et $0 \leq t \leq x$ on a $e^0 \leq e^t \leq e^x$ car axp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $2 = e^0 + 1 \leq e^t + 1 \leq e^x + 1$ et (tout est strictement positif)
   Conclusion : $\boxed{\forall x \in]0;+\infty[\text{ et } \forall t \in [0;x] \ \dfrac{1}{e^x+1} \leq \dfrac{1}{e^t+1} \leq \dfrac{1}{2}}$

   b) On travaille alors sur le contenu de l'intégrale :
   pour tout $x > 0$ et $t \in [0;x]$, on a $t \geq 0$ donc
   $\dfrac{t}{e^x+1} \leq \dfrac{t}{e^t+1} \leq \dfrac{t}{2}$ et les bornes étant $0 \leq x$ on a donc
   $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{e^x+1}dt \leq \int_0^x \frac{t}{e^t+1}dt \leq \int_0^x \frac{t}{2}dt$ soit
   $\dfrac{1}{e^x+1}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x \leq \int_0^x \dfrac{t}{e^t+1}dt \leq \dfrac{x^2}{2}$ et en multipliant par $\dfrac{2}{x^2} \geq 0$
   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } x > 0 : \dfrac{1}{e^x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}}$

   c) et par encadrement, quand $x \to 0$: $\dfrac{1}{e^x+1} \to \dfrac{1}{2}$
   Conclusion : $\boxed{f(x) \to \dfrac{1}{2} = f(0) \text{ quand } x \to 0 \text{ et } f \text{ continue en } 0}$

2. a) La fonction $h : t \to \frac{t}{e^t+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $H : x \to \int_0^x \frac{t}{e^t+1}dt$ est une primitive C^1 de h sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $H'(x) = h(x)$
   Donc pour $x^2 \neq 0$, f est C^1 comme produit de fonction C^1
   Conclusion : $\boxed{f \text{ est } C^1 \text{ sur }]0;+\infty[}$
   de plus
   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-4}{x^3}H(x) + \frac{2}{x^2}h(x) \\ &= \frac{-4}{x^3}\left[H(x) - \frac{1}{2}xh(x)\right] \end{aligned}$$
   Conclusion : $$\boxed{\begin{array}{l} \text{avec } g(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t}{e^t+1}dt - \frac{1}{2}\frac{x^2}{e^x+1} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \\ f'(x) = \dfrac{-4}{x^3}g(x) \text{ pour tout } x > 0 \end{array}}$$

   b) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
   $$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{x}{e^x+1} - \frac{1}{2}\frac{2x(e^x+1) - x^2e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{x}{2(e^x+1)^2}\frac{2(e^x+1) - 2(e^x+1) + xe^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{x^2e^x}{2(e^x+1)^2} \end{aligned}$$

et on a donc

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow +$	
$f'(x)$	$?$	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

et par continuité (en 0)

Conclusion : $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+}$

3. a) Soit $\dfrac{t}{e^t+1} - 1 = \dfrac{t - e^t - 1}{e^t+1}$ pour tout $t \geq 0$

$h(t) = t - e^t - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $h'(t) = 1 - e^t$ donc

t	0		$+\infty$
$h'(t) = 1 - e^t$	0	$\searrow -$	
$h(t)$	-2	$\searrow -$	

et $h(t) < 0$

Conclusion : $\boxed{\frac{t}{e^t+1} \leq 1 \text{ pour tout } t \geq 0}$

b) Pour tout $x > 0$, les bornes en ordre croissant donc

$$0 \leq \int_0^x \frac{t}{e^t+1} dt \leq \int_0^x 1 dt \text{ et } \frac{2}{x^2} > 0 \text{ donc}$$
$$0 \leq \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{e^t+1} dt \leq \frac{2}{x} \to 0$$

et par encadrement *Conclusion :* $\boxed{f(x) \text{ tend vers } 0 \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty}$

Bilan : quelques points de contrôles. bien

Exercice 2

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynômiale de degré inférieur ou égal à 2 et on note $\mathcal{B}0$ la base $(e_0, e_1 e_2)$ de E, où pour tout réel x, on a : $e_0(x) = 1,\ e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$

On considère l'application, notée f, qui à toute fonction polynômiale P appartenant à E associe la fonction polynômiale $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f(P))(x) = 2xP(x) - \left(x^2 - 1\right) P'(x).$$

1. a) Pour tout P et Q de E et *et* β réels : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(f(\alpha P + \beta Q))(x) &= 2x(\alpha P + \beta Q)(x) - \left(x^2-1\right)(\alpha P + \beta Q)'(x) \\ &= \alpha\left(2xP(x) - \left(x^2-1\right)P'(x)\right) + \beta\left(2xQ(x) - \left(x^2-1\right)Q'(x)\right) \\ &= \alpha f(P)(x) + \beta f(P)(x)\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{f(\alpha P + \beta Q) = \alpha f(P) + \beta f(P) \text{ et } f \text{ est une application linéaire.}}$

b) Soit $P(x) = a + bx + cx^2$ pour tout x réels alors $P'(x) = b + 2cx$

$$\begin{aligned}f(P)(x) &= 2x\left(a + bx + cx^2\right) - \left(x^2-1\right)(b + 2cx) \\ &= b + 2(c+a)x + bx^2\end{aligned}$$

Donc pour tout $P \in E$, $f(P) \in E$ et f est une application de E dans E

Conclusion : $\boxed{f \in \mathcal{L}(E)}$

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$e_0'(x) = 0$ donc $f(e_0)(x) = 2x$ donc $f(e_0) = 2e_1$
$e_1'(x) = 1$ donc $f(e_1)(x) = 2x^2 - (x^2 - 1) = 1 + x^2$ donc $f(e_1) = e_0 + e_2$
$e_2'(x) = 2x$ donc $f(e_2)(x) = 2x^3 - (x^2 - 1)2x = 2x$ donc $f(e_2) = 2e_1$
On a alors les coordonnées des images et
Donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. a) On a $\text{Vect}(f) = \text{Vect}(f(e_0); f(e_1); f(e_2)) = \text{Vect}(2e_1; e_0 + e_2) = \text{Vect}(e_1; e_0 + e_2)$
Et comme la famille $(e_1; e_0 + e_2)$ est libre (deux vecteurs non proportionnels), elle est libre et génératrice de $\text{Im}(f)$, c'en est donc une base et
Conclusion : $\boxed{\dim(\text{Im}(f)) = 2}$

b) On a alors (théorème du rang) $\dim(\ker(f)) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(f)) = 1$
et comme $f(e_0 - e_2) = f(e_0) - f(e_2) = 0$ alors $(e_0 - e_2)$ est une famille libre (1 vecteur non nul) de 1 vecteur de $\ker(f)$, donc une base de $\ker(f)$
Conclusion : $\boxed{\text{Ker}(f) = \text{Vect}(e_0 - e_2)}$

3. a) $A - \alpha I = \begin{pmatrix} -\alpha & 1 & 0 \\ 2 & -\alpha & 2 \\ 0 & 1 & -\alpha \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} L_1 + \frac{1}{2}L_2 \to L_2 \\ L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_3 \to L_3 \end{matrix}$ non inversible

$$\iff \begin{pmatrix} 2 & -\alpha & 2 \\ 0 & 1 - \alpha^2/2 & \alpha \\ 0 & 1 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \to L_1 \\ L_1 - \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) L_3 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 & -\alpha & 2 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 1 & \alpha + \alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Donc $A - \alpha I$ est non inversible si et seulement si $\alpha(4 - \alpha^2) = 0$
Conclusion : $\boxed{\text{Donc les valeurs propres de } A \text{ sont } 0,\ 2 \text{ et } -2}$

b) Et comme A, d'ordre 3, possède 3 valeurs propres distinctes, elle donc diagonalisable.
Conclusion : $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$
La somme des dimensions des sous espaces étant inférieure à 3, ils sont chacun de dimension 1.
le sous espace associé à 0 est $E_0 = \text{Ker}(f) = \text{Vect}(e_0 - e_1)$

$$(A - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -2x + y = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ z = x \end{cases}$$

donc le sous espace associé à 2 est $E_2 = \text{Vect}(e_1 + 2e_2 + e_3)$

$$(A + 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ z = x \end{cases}$$

donc le sous espace associé à -2 est $E_{-2} = \text{Vect}(e_1 - 2e_2 + e_3)$

c) les sous-espaces propres de f, autres que $\text{Ker}(f)$, sont E_2 et E_{-2}.
Et comme $e_1 + 2e_2 + e_3 = (e_1 + e_3) + 2e_2 \in \text{Im}(f)$ donc $E_2 \subset \text{Im}(f)$
et de même pour $e_1 - 2e_2 + e_3 = (e_1 + e_3) - 2e_2$
Conclusion : $\boxed{\text{les sous-espaces propres de } f, \text{ autres que Ker}(f), \text{ sont inclus dans Ker}(f).}$

Bilan : application linéaire sans préciser les ensembles : douteux. demande de la finesse

Exercice 3

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n, contenant chacune n boules. On répète n épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.
Pour tout i de $\{1, 2, ..., n\}$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée 1 contient toujours n boules au bout de ces n épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.

1. a) Pour tout i et pour tout k, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$ on note $U_{i,k}$ l'événement « l'urne numéro i est choisie à la $k^{ème}$ épreuve».
   $(X_i = 1)$ signifie que l'urne i contient encore ses n boules après les n tirages, donc qu'elle n'a jamais été choisie.
   $(X_i = 1) = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k}}$ événement indépendants donc
   $$\begin{aligned} \mathrm{P}(X_i = 1) &= \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}\left(\overline{U_{i,k}}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{n-1}{n}\right) \quad \text{urnes équiprobables} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$
   b) $(X_i = 1) \cap (X_j = 1)$ signifie qu'aucune des deux urnes i et j n'ont été choisies.
   A chaque tirage, la probabilité en est de $\dfrac{n-2}{n}$ (urnes équiprobables) donc, pour tout $i \neq j$ de $\{1, 2, ..., n\}$
   $$\begin{aligned} \mathrm{P}(X_i = 1 \cap X_j = 1) &= \left(\frac{n-2}{n}\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \end{aligned}$$
   c) $\left(1 - \dfrac{2}{n}\right) - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^2 = -\dfrac{1}{n^2}$ donc $1 - \dfrac{2}{n} \neq \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^2$ et $\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^n \neq \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{2n}$
   et comme $\mathrm{P}(X_i = 1)\,\mathrm{P}(X_j = 1) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{2n} \neq \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^n$
   Donc $\mathrm{P}(X_i = 1)\,\mathrm{P}(X_j = 1) \neq \mathrm{P}(X_i = 1 \cap X_j = 1)$
   Conclusion : $\boxed{\text{si } i \text{ et } j \text{ sont deux entiers naturels distincts, } X_i \text{ et } X_j \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

2. On pose $Y_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$
   a) X_i est une variable de Bernoulli donc $E(X_i) = \mathrm{P}(X_i = 1)$ donc $E(Y_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ et
   Conclusion : $\boxed{E(Y_n) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}$
   b) On a alors
   $$\begin{aligned} \frac{1}{n} E(Y_n) &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \exp\left[n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] \end{aligned}$$

et comme $\ln(1+x) \sim x$ quand $x \to 0$ alors $n \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \sim -n\frac{1}{n}$ donc $n \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \to -1$ et $\frac{1}{n} E(Y_n) \to e^{-1}$

ou encore $\dfrac{E(Y_n)}{n/e} \to 1$

Conclusion : $\boxed{E(Y_n) \sim \dfrac{n}{e}}$

Y_n compte le nombre d'urne restant intactes. Donc, en moyenne, le tiers ($e = 3$) environ des urnes reste intouchées.

3. Pour tout i de $\{1, 2, ..., n\}$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée i à la fin de ces n épreuves.

   a) N_i est le nombre de fois où l'urne i a été choisie en n épreuves indépendantes, la probabilité à chacune étant de $\frac{1}{n}$ donc

   Conclusion : $\boxed{N_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{n}\right) \text{ donc } E(N_i) = n\frac{1}{n} = 1}$

   b) X_i vaut 0 si l'urne i a été choisie au moins une fois et N_i vaut 0 si elle n'a jamais été choisie

   Conclusion : $\boxed{N_i X_i = 0}$

   c) Les variables N_i et X_i ne sont pas indépendantes, en effet $E(N_i X_i) = 0 \neq E(N_i) E(X_i)$

4. Compléter le programme informatique suivant pour qu'il simule l'expérience décrite au début de cet exercice et affiche les valeurs prises par X_1 et N_1 pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
Program edhec 2011 ;
Var    x1, n1, n, k, tirage, hasard : integer ;
Begin
Randomize ; // initialisation du générateur
Writeln('donnez un entier naturel n supérieur ou égal à 2') ;
Readln(n) ; // saisit le nombre d'expérience et d'urne
nl :=0 ; x1 := 1 ; // n1 est un compteur
For k :=1 to n do // on fait n fois
begin
    hasard : = random(n) + 1 ; // choix d'un numero d'urne
     If hasard = 1    then
     begin
          xl :=0 ; // on a choisi au moins une fois l'urne 1
          nl :=n1+1 ; // on compte une boule manquante de plus
     end ;
end ;
Writeln(xl, nl) ;
End.
```

Bilan : bel exercice, décompositions, interprétations
le programme aurait pu être plus lacunaire.

Problème

Notations et objectifs

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, et indépendantes.

On suppose que X est une variable à densité et on note F_X sa fonction de répartition.

On suppose par ailleurs que la loi de Y est donnée par : $\mathrm{P}(Y=1)=\mathrm{P}(Y=-1)=\dfrac{1}{2}$
L'indépendance de X et Y se traduit par les égalités suivantes, valables pour tout réel x :

$$P([X\leq x]\cap[Y=1])=P(X\leq x)\,P(Y=1)\ \text{ et }\ P([X\leq x]\cap[Y=-1])=P(X\leq x)\,P(Y=-1)$$

On pose $Z=XY$ et on admet que Z est, elle aussi, une variable aléatoire définie sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$.
On se propose d'établir deux résultats utiles pour la suite dans la partie 1, puis d'en déduire la loi de la variable aléatoire Z en fonction de la loi de X dans les parties 2 et 3.

Partie 1 : expression de la fonction de répartition de Z en fonction de celle de X

1. Si $X\hookrightarrow\mathcal{U}_{[a,b]}$ alors une densité est $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & \text{si } x\in[a,b]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

   Donc sa fonction de répartition est $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt=\begin{cases}0 & \text{si } x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x\in[a,b]\\ 1 & \text{si } x>b\end{cases}$

   Et si $X\hookrightarrow\varepsilon(\lambda)$ alors $F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

2. $((Y=1),(Y=-1))$ est un système complet d'événements, donc, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Z\leq x)&=\mathrm{P}(Y=1)\,\mathrm{P}_{Y=1}(Z\leq x)+\mathrm{P}(Y=-1)\,\mathrm{P}_{Y=-1}(Z\leq x)\\&=\mathrm{P}(Y=1)\,\mathrm{P}_{Y=1}(X\leq x)+\mathrm{P}(Y=-1)\,\mathrm{P}_{Y=-1}(-X\leq x)\\&=\mathrm{P}(Y=1)\,\mathrm{P}(X\leq x)+\mathrm{P}(Y=-1)\,\mathrm{P}(-X\leq x)\ \text{ indépendance}\\&=\frac{1}{2}\left[\mathrm{P}(X\leq x)+\mathrm{P}(X\geq -x)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[F_X(x)+1-F_X(-x)\right]\end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\quad F_Z(x)=\frac{1}{2}\left(F_X(x)-F_X(-x)+1\right)}$

Bilan : Les fonctions de répartitions des lois usuels doivent-elles être connues ?

Partie 2 : étude de deux premiers exemples

1. On suppose que la loi de X est la loi normale centrée réduite.
   Sa fonction de répartition est donc $F_X=\Phi$ avec $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$ pour tout x réel.
   Donc $\forall x\in\mathbb{R},\quad F_Z(x)=\frac{1}{2}\left(\Phi(x)-(1-\Phi(x))+1\right)=\Phi(x)$
   Conclusion : $\boxed{Z\text{ suit également une loi }\mathcal{N}(0,1)}$
2. On suppose que la loi de X est la loi uniforme sur $[0,1]$
   a) On a $F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ x & \text{si } x\in[0,1]\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}$ donc $F(-x)=\begin{cases}0 & \text{si } x>0\\ -x & \text{si } x\in[-1,0]\\ 1 & \text{si } x<-1\end{cases}$
   b) et $F_Z(x)=\frac{1}{2}\left(F_X(x)-F_X(-x)+1\right)=\cdots$
      – si $x<-1$: $\frac{1}{2}(0-1+1)=0$
      – si $[-1,0]$: $\frac{1}{2}(0--x+1)=\frac{1+x}{2}$
      – si $[0,1]$: $\frac{1}{2}(x-0+1)=\frac{x+1}{2}$

– si $x>1$: $\frac{1}{2}(1-0+1)=1$

Finalement $F_Z(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<-1 \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } x\in[-1,1] \\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases}$

et on reconnaît a fonction de répartition de $Z\hookrightarrow \mathcal{U}_{[-1,1]}$

Partie 3 : étude du cas où la loi de X est la loi exponentielle de paramètre 1.

1. a) On a $F_X(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1-e^{-x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ et $F_X(-x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x>0 \\ 1-e^{x} & \text{si } x\leq 0 \end{cases}$ donc

   $F_Z(x)=\frac{1}{2}(F_X(x)-F_X(-x)+1)=\begin{cases} \frac{1}{2}(0-(1-e^x)+1)=\frac{1}{2}e^x & \text{si } x<0 \\ \frac{1}{2}(1-e^{-x}-0+1)=1-\frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

   b) La fonction de répartition de Z est continue et C^1 sur $]-\infty,0[$ et $[0,+\infty[$

   En 0^- : $F_Z(x)=\frac{1}{2}e^x\to\frac{1}{2}$ et $F_Z(0)=1-\frac{1}{2}e^0=\frac{1}{2}$ donc F_Z continue en 0^- et donc sur $\mathbb{R}$.

   Donc Z est une variable à densité.

   N.B. Il était plus simple de raisonner sur $F_Z(x)=\frac{1}{2}(F_X(x)-F_X(-x)+1)$ et comme F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ comme fonction de répartition de variable à densité alors F_Z également.

   c) une densité de Z est $F_Z'(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^x & \text{si } x<0 \\ \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}=\frac{1}{2}e^{-|x|}$

2. a) On reconnaît dans $\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx$ l'espérance d'une loi $\varepsilon(1)$ donc $\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=\frac{1}{1}=1$

   b) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$ et $f_Z(-x)=\frac{1}{2}e^{-|-x|}=\frac{1}{2}e^{-|x|}=f_z(x)$

   Donc f_Z est bien paire, et la fonction $x\to xf_Z(x)$ est impaire.

   Or $\int_0^{+\infty}xf_Z(x)\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}xe^{-x}dx$ converge, donc $\int_{-\infty}^{0}xf_Z(x)\,dx$ converge et lui est opposée.

   Finalement $\int_{-\infty}^{+\infty}xf_Z(x)\,dx=0$

   Conclusion : $\boxed{Z \text{ a une espérance et } E(Z)=0}$

3. a) Avec $X\hookrightarrow\exp(1)$ on a $E(X^2)=V(X)+E(X)^2=2$ et $E(X^2)=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx$

   Conclusion : $\boxed{\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=2}$

   b) Donc $\int_0^{+\infty}x^2f_Z(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=1$ et par parité $\int_{-\infty}^{0}x^2f_Z(x)\,dx=1$

   Donc $\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_Z(x)\,dx$ converge et vaut 2

   Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} Z^2 \text{ a une espérance et } E(Z^2)=2 \\ Z \text{ a une variance et } V(Z)=E(Z^2)-E(Z)^2=2 \end{array}}$

4. a) On a $E(Y)=-1\mathrm{P}(Y=-1)+1\mathrm{P}(Y=1)=0$ donc $E(Y)=0$

   Conclusion : $\boxed{E(X)E(Y)=0=E(Z)}$

   On retrouve le résultat connu pour deux variables discrètes indépendantes : l'espérance du produit est le produit des espérances.

   b) On a $Z^2=X^2Y^2$ avec $Y^2=1$ donc $Z^2=X^2$

   On a donc $E(Z^2)=E(X^2)=V(X)+E(X)^2=2$ et $V(Z)=E(Z^2)=2$

5. Soit U et V des variables aléatoires suivant respectivement la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et la loi uniforme sur $[0,1[$

a) On pose $Q = -\ln(1-V)$ et on admet que Q est une variable aléatoire.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Q \leq x &\iff -\ln(1-V) \leq x \\ &\iff 1 - V \geq e^{-x} \\ &\iff V \leq 1 - e^{-x} \end{aligned}$$

Donc $F_Q(x) = \mathrm{P}(Q \leq x) = F_V(1 - e^{-x})$
F_V est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R} \backslash \{0,1\}$ donc (composée) F_Q est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 en x tel que $1 - e^{-x} \neq 1$ (toujours) et $\neq 0$ (sur $\mathbb{R}^*$)
Donc Q est une variable à densité et une densité de Q est donnée par
$f_Q(x) = F_V'(1-e^{-x})(--e^{-x}) = e^{-x} f_V(1-e^{-x})$
avec $1 - e^{-x} < 0 \iff x < 0$ et $1 - e^{-x} < 1$ toujours donc
$f_Q(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \ (1 - e^{-x} < 0) \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \ (1 - e^{-x} \in [0,1]) \end{cases}$
Conclusion : $\boxed{Q \hookrightarrow \varepsilon(1)}$

b) On pose $R = 2U - 1$ et on admet que R est une variable aléatoire.
$U(\Omega) = \{0,1\}$ donc $(2U-1)(\Omega) = \{-1,1\}$ avec
$\mathrm{P}(R=1) = \mathrm{P}(U=1) = \frac{1}{2}$ et $\mathrm{P}(R=-1) = \mathrm{P}(U=0) = \frac{1}{2}$ (même loi que le Y de la partie 1)

c) Informatique.

En tenant compte des résultats des questions 5.a) et 5.b), écrire en Turbo Pascal une déclaration de fonction dont l'en-tête est
`function z : real ;` pour qu'elle simule la loi de Z.
Il faut remettre les morceaux bout à bout :
$V \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1[}$ est simulée par `random`
et $Q = -\ln(1-V)$ suit $\varepsilon(1)$ a la même loi que X
U est simulé par `random(2)`
et $R = 2U - 1$ a la même loi que Y et indépendant de X
`randomize` est exécutée une seule fois dans le programme principal.

```
function z : real ;
var V, X, U, Y,Z ;
begin
    V :=random ; X :=-ln(1-V);
    U :=random(2) ;Y :=2*U-1 ;
    Z :=X*Y ;
end ;
```

Bilan : exercice nécessitant de la réflexion. Un joli PASCAL de bon niveau de difficulté.