

EDHEC eco 2011

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{e^t + 1} dt$ si $x > 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$.

1. a) Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty[, \forall t \in [0, x], \frac{1}{e^x + 1} \leq \frac{1}{e^t + 1} \leq \frac{1}{2}$.
b) Etablir alors que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\frac{1}{e^x + 1} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.
c) En déduire que la fonction f est continue (à droite) en 0.
2. a) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, puis vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on peut écrire : $f'(x) = -\frac{4}{x^3}g(x)$, où g est une fonction que l'on déterminera.
b) Etudier les variations, puis le signe de la fonction g . En déduire que f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
3. a) Montrer que, pour tout réel t positif, on a : $\frac{t}{e^t + 1} \leq 1$.
b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 2

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 2 et on note $\mathcal{B}$ la base (e_0, e_1, e_2) de E , où pour tout réel x , on a : $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$.

On considère l'application, notée f , qui à toute fonction polynômiale P appartenant à E , associe la fonction polynômiale $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f(P))(x) = 2xP(x) - (x^2 - 1)P'(x).$$

1. a) Montrer que f est une application linéaire.
b) En écrivant, pour tout réel x , $P(x) = a + bx + cx^2$, définir explicitement $(f(P))(x)$ puis en déduire que f est un endomorphisme de E .
c) Ecrire $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ comme des combinaisons linéaires de e_0 , e_1 et e_2 , puis en déduire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. a) Vérifier que $\text{Im } f = \text{vect}(e_1, e_0 + e_2)$ et donner la dimension de $\text{Im } f$.
b) Déterminer $\text{Ker } f$.
3. a) A l'aide de la méthode du pivot de Gauss, déterminer les valeurs propres de A .
b) En déduire que f est diagonalisable et donner les sous-espaces propres de f .
c) Vérifier que les sous-espaces propres de f , autres que $\text{Ker } f$, sont inclus dans $\text{Im } f$.

Exercice 3

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n , contenant chacune n boules. On répète n épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une urne au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.

Pour tout i de $\{1, 2, \dots, n\}$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée i contient toujours n boules au bout de ces n épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.

1. a) Pour tout i et tout k , éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$, on note $U_{i,k}$ l'événement "l'urne numéro i est choisie à la $k^{\text{ème}}$ épreuve".
Ecrire l'événement $(X_i = 1)$ à l'aide de certains des événements $U_{i,k}$, puis montrer que :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, P(X_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

- b) Justifier également que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$, on a :

$$P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n.$$

- c) Comparer $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$ et $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$ et en déduire que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$, alors les variables X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

2. On pose $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

- a) Déterminer l'espérance de Y_n , notée $E(Y_n)$.

- b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(Y_n)}{n}$ et donner un équivalent de $E(Y_n)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

3. Pour tout i de $\{1, 2, \dots, n\}$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée i à la fin de ces n épreuves.

- a) Donner sans calcul la loi de N_i ainsi que la valeur de $E(N_i)$.

- b) Que vaut le produit $N_i X_i$?

- c) Les variables N_i et X_i sont-elles indépendantes ?

4. Compléter le programme informatique suivant pour qu'il simule l'expérience décrite au début de cet exercice et affiche les valeurs prises par X_1 et N_1 pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```

Program edhec_2011 ;
Var x1, n1, n, k, tirage, hasard : integer ;
Begin
  Randomize ;
  Writeln('donnez un entier naturel n supérieur ou égal à 2') ;
  Readln(n) ;
  n1 := 0 ; x1 := 1 ;
  For k := 1 to n do
    begin
      hasard := random(n)+1 ;
      if hasard = 1 then begin x1 := ----- ; n1 := ----- ; end ;
    end ;
  Writeln(x1, n1) ;
End.
```

Problème

Notations et objectifs

On considère deux variables aléatoires X et Y , définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et indépendantes.

On suppose que X est une variable à densité et on note F_X sa fonction de répartition.

On suppose par ailleurs que la loi de Y est donnée par $P(Y = 1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}$.

L'indépendance de X et Y se traduit par les égalités suivantes, valables pour tout réel x :

$$P([X \leq x] \cap [Y = 1]) = P(X \leq x) P(Y = 1) \quad \text{et} \quad P([X \leq x] \cap [Y = -1]) = P(X \leq x) P(Y = -1).$$

On pose $Z = XY$ et on admet que Z est, elle-aussi, une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On se propose d'établir deux résultats utiles pour la suite dans la partie 1, puis d'en déduire la loi de la variable aléatoire Z en fonction de la loi de X dans les parties 2 et 3.

Partie 1 : expression de la fonction de répartition de Z en fonction de celle de X .

1. Rappeler l'expression des fonctions de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a, b]$ (avec $a < b$) et d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).
2. En utilisant le système complet d'événements $\{(Y = 1), (Y = -1)\}$, montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_Z(x) = \frac{1}{2} (F_X(x) - F_X(-x) + 1).$$

Partie 2 : étude de deux premiers exemples.

1. On suppose que la loi de X est la loi normale centrée réduite.
Reconnaître la loi de Z .
2. On suppose que la loi de X est la loi uniforme sur $[0, 1]$.
 - a) Déterminer l'expression de $F_X(-x)$ selon les valeurs prises par x .
 - b) Déterminer $F_Z(x)$ pour tout réel x , puis reconnaître la loi de Z .

Partie 3 : étude du cas où la loi de X est la loi exponentielle de paramètre 1.

1. a) Montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est définie par :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- b) En déduire que Z est une variable aléatoire à densité.
- c) Etablir alors qu'une densité de Z est la fonction f_Z définie pour tout réel x par :

$$f_Z(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

- d) Donner la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$.

- e) Montrer que f_Z est une fonction paire et en déduire l'existence et la valeur de $E(Z)$.
2. a) Donner la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$.
- b) En déduire l'existence et la valeur de $E(Z^2)$, puis donner la valeur de la variance de Z .
3. a) Déterminer $E(X)E(Y)$ et comparer avec $E(Z)$. Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?
- b) Exprimer Z^2 en fonction de X , puis en déduire de nouveau la variance de Z .
4. Soit U et V des variables aléatoires suivant respectivement la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et la loi uniforme sur $[0, 1[$.
- a) On pose $Q = -\ln(1 - V)$ et on admet que Q est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de Q et en déduire la loi suivie par la variable aléatoire Q .
- b) On pose $R = 2U - 1$ et on admet que R est une variable aléatoire. Déterminer $R(\Omega)$ et donner la loi suivie par la variable R .
- c) Informatique.
- En tenant compte des résultats des questions 5a) et 5b), écrire en **Turbo Pascal** une déclaration de fonction dont l'entête est `function z :real ;` pour qu'elle simule la loi de Z .