

Exercice 1

On considère l'application

$$f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = (x + \ln x) e^{x-1}$$

Partie I : Étude et représentation graphique de f

1. Pour tout x de $]0; +\infty[$, $x > 0$ donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme composée et produit de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{x-1} + (x + \ln(x)) e^{x-1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{x} + x + \ln(x)\right) e^{x-1} \end{aligned}$$

2. Soit $g(x) = \ln(x) + \frac{1}{x}$
 g est dérivable sur $]0, +\infty[$ (car $x > 0$ et $x \neq 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$)

$$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

donc

x	0	1	$+\infty$
$x-1$		-	+
$g'(x)$		-	+
$g(x)$		$\searrow$ 1 $\nearrow$	

et donc $g(x) \geq 1 > 0$

Conclusion : $\forall x \in]0, +\infty[, \quad \ln x + \frac{1}{x} > 0$

3. on a donc pour tout $x \in]0, +\infty[$

$$x + \ln x + 1 + \frac{1}{x} = \left(\ln x + \frac{1}{x}\right) + 1 + x > 0$$

car $1 + x \geq 0$

Conclusion : $x \in]0, +\infty[\quad x + \ln x + 1 + \frac{1}{x} > 0.$

4. On a donc $f'(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$ Conclusion : f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

5. En 0 : $f(x) = (x + \ln x) e^{x-1} \rightarrow -\infty$

En $+\infty$: $f(x) = (x + \ln x) e^{x-1} \rightarrow +\infty$

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 1 $\nearrow$	$+\infty$

et $f'(1) = 3$ pente de la tangente en 1.

6. En 0 : $f(x) \rightarrow -\infty$ et on a donc une asymptote verticale

En $+\infty$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{(x + \ln x) e^{x-1}}{x} \\ &= \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) e^{x-1} \\ &\rightarrow +\infty \end{aligned}$$

car $\ln(x) = o(x)$ et on a donc une branche parabolique verticale en $+\infty$.

7. Au vu des 2 branches infinies, on peut prédire au moins un point d'inflexion qu'il serait intéressant de rechercher (changement de signe de f'') :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{-1}{x^2} + 1 + \frac{1}{x} \right) e^{x-1} + \left(1 + \frac{1}{x} + x + \ln(x) \right) e^{x-1} \\ &= \left(\frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x} + 1 + x + \ln(x) \right) e^{x-1} \end{aligned}$$

mais l'étude du signe de cette quantité est par trop rébarbative !

Bilan : mise en jambe paisible

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à f .

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

On va recycler les propriétés de f pour étudier cette suite.

1. Par récurrence :

$u_0 = 2$ existe et $u_0 \geq 2$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n existe et $u_n \geq 2$

Alors $u_n > 0$ et $f(u_n)$ est donc calculable (définie)

Et comme f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et que u_n et 2 en sont éléments, $f(u_n) \geq f(2) = (2 + \ln(2)) \cdot e \geq 2$ car $\ln(2) \geq 0$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$

2. Pour $n = 0$: $u_0 = 2$ et $e^0 = 1$ donc $u_0 \geq e^0$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq e^n$ alors le moyen naturel est :

$u_{n+1} = f(u_n) \geq f(e^n)$ mais $f(e^n) = (e^n + \ln(e^n)) e^{e^n-1}$ ne donne pas directement le e^{n+1}

On recycle donc la question précédente :

$f(u_n) = (u_n + \ln(u_n)) e^{u_n-1}$ avec

– $\ln(u_n) \geq \ln(2)$ donc $u_n + \ln(u_n) \geq u_n \geq e^n$

– et $u_n - 1 \geq 1$ donc $e^{u_n-1} \geq e^1$

– d'où $f(u_n) \geq e^n e = e^{n+1}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq e^n$ et par minoration $u_n \rightarrow +\infty$,

3. On calcule u_n et n tant que $u_n < 10^{20}$ (ou jusqu'à ce que $u_n \geq 10^{20}$ puisque ce n'est pas pour u_0 que cela se produit)

program premier ;

var n :integer ; u :real ;

begin

u :=2 ; n :=0 ;

while u<1E20 do

begin u :=(u+ln(u))*exp(u-1) ; n :=n+1 end ;

writeln(n) ;

end.

Bilan : un peu d'astuce requise pour le 2

Partie III : Étude d'extremums locaux pour une fonction de deux variables associée à f

On considère l'application

$$F :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto F(x) = \int_1^x f(t) dt.$$

1. f est continue sur $]0; +\infty[$ donc F est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.

On considère l'application de classe C^2

$$G :]0; +\infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto G(x, y) = F(x) + F(y) - 2e^{\frac{x+y}{2}}.$$

2. On a, pour tout $(x, y) \in]0; +\infty[^2$

$$\begin{aligned} G'_x(x, y) &= \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = F'(x) - 2 \frac{1}{2} e^{\frac{x+y}{2}} \\ &= f(x) - e^{\frac{x+y}{2}} \\ G'_y(x, y) &= f(y) - e^{\frac{x+y}{2}} \end{aligned}$$

3. a) f est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ donc bijective de $]0; +\infty[$ dans $] \lim_0 f; \lim_{+\infty} f[= \mathbb{R}$

- b) Pour tout $(x, y) \in]0; +\infty[^2$, (x, y) est un point critique de G si et seulement si

$$\begin{cases} G'_x(x, y) = 0 \\ G'_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f(x) - e^{\frac{x+y}{2}} = 0 \\ f(y) - e^{\frac{x+y}{2}} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f(x) = f(y) \\ f(y) - e^{\frac{x+y}{2}} = 0 \end{cases} \quad \text{et comme } f \text{ est}$$

bijective sur $]0; +\infty[$ et que x et y en sont éléments,

$$\iff \begin{cases} x = y \\ f(y) - e^y = 0 \end{cases}$$

on résout alors cette seconde équation

$$\begin{aligned} f(y) - e^y &= 0 \iff (y + \ln(y)) e^{y-1} - e^y = 0 \\ &\iff (y + \ln(y)) e^{-1} - 1 = 0 \\ &\iff y + \ln(y) = e \end{aligned}$$

Conclusion : $(x, y) \in]0; +\infty[^2$ est un point critique de G si et seulement si $x = y$ et $x + \ln x = e$.

4. On peut appliquer le théorème de bijection sur $]0; +\infty[$ puis vérifier que $1 < \alpha < e$ en comparant les images, ou plus rapidement :

Soit $k(x) = x + \ln(x)$. k est somme de deux fonctions strictement croissante, donc

k est continue et strictement croissante sur $]1; e[$ donc bijective de $]1; e[$ dans $] \lim_1 k; \lim_e k[=]1; e + 1[$

et comme $e \in]1; e + 1[$ alors l'équation $k(x) = e$, admet une unique solution dans $]1; e[$.

et comme k est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, elle n'en a pas d'autres.

Conclusion : $x + \ln(x) = e$ a une unique solution α sur $]0; +\infty[$ et $1 < \alpha < e$

5. G a donc un unique point critique (α, α) sur l'ouvert $]0; +\infty[$

Reste à tester $rt - s^2 > 0$:

On a, pour tout $(x, y) \in]0; +\infty[^2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, y) &= f'(x) - \frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x}(x, y) &= -\frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(x, y) &= f'(y) - \frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}}\end{aligned}$$

et en (α, α) :

$$\begin{aligned}r &= \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(\alpha, \alpha) = f'(\alpha) - \frac{1}{2}e^\alpha \\ s &= -\frac{1}{2}e^\alpha \\ t &= f'(\alpha) - \frac{1}{2}e^\alpha\end{aligned}$$

On simplifie l'expression de $f'(\alpha)$ en tenant compte du fait que $\alpha + \ln(\alpha) = e$:

$$\begin{aligned}f'(\alpha) &= \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \alpha + \ln(\alpha)\right)e^{\alpha-1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{\alpha} + e\right)e^{\alpha-1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)e^{\alpha-1} + e^\alpha > e^\alpha \text{ et donc} \\ f'(\alpha) - \frac{1}{2}e^\alpha &> \frac{1}{2}e^\alpha\end{aligned}$$

et on a donc $rt - s^2 > 0$

Conclusion : G a un extremum local unique en (α, α) sur l'ouvert $]0, +\infty[^2$
et comme $r > 0$, c'est un minimum

Bilan : sans gros calcul si l'on a de l'élégance.

Balaye bien le programme d'analyse.

Exercice 2

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Partie 1 : Détermination d'une racine carrée de A

1. A est symétrique donc diagonalisable et comme elle a deux colonnes identiques, elle est non inversible.

Le rang de A (hors programme) est la dimension de l'image de l'application f associée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Son image est engendrée par $((1, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 1, 3))$ donc par $((1, 1, 1), (1, 1, 3))$.

Cette famille étant libre (2 vecteurs non proportionnels), elle est une base de l'image et donc $\dim \text{Im}(f) = 2$

Donc le rang de A est égal à 2.

2. Comme A ne peut pas avoir plus de trois valeurs propres distinctes, il suffit de les tester pour être sûr de les avoir toutes :

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(A - 0I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 & L_2 - L_1 \\ x + y + 3z = 0 & L_3 - L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ z = 0 & L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases} \quad (\text{en paramétrant par } x \text{ pour avoir la première ligne de } P \text{ égale à } 1)$$

Donc 0 est valeur propre de A et le sous espace propre associé est $E_0 = \text{Vect}((1, -1, 0))$

$$(A - 1I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -x \\ y = x \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Donc 1 est valeur propre de A et le sous espace propre associé est $E_1 = \text{Vect}((1, 1, -1))$

$$(A - 4I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -3x + y + z = 0 & L_1 + L_3 \\ x - 3y + z = 0 & L_2 + L_3 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = x \\ z = 2x \end{cases} \quad \text{donc 4 est valeur propre de } A \text{ et le sous espace propre associé est } \text{Vect}((1, 1, 2))$$

Montrer que 0, 1 et 4 sont les trois valeurs propres de A et déterminer les sous-espaces propres associés.

3. A ayant trois valeurs propres distinctes, la juxtaposition de vecteurs propres associés à 0, 1 et 4 : $((1, -1, 0), (1, 1, -1), (1, 1, 2))$ est une base de vecteurs propres.

Donc avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant et $P =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{première ligne formée de } 1) \text{ matrice de passage donc inversible on a } A = PDP^{-1}.$$

4. Par la méthode de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 \\ L_1 + L_2 \rightarrow L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 - L_2/2 \rightarrow L_1 \\ L_2/2 \rightarrow L_2 \\ L_3 + L_2/2 \rightarrow L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 \\ L_2 - L_3/3 \rightarrow L_2 \\ L_3/3 \rightarrow L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 \\ L_2 - L_3/3 \rightarrow L_2 \\ L_3/3 \rightarrow L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix} \text{ et donc}$$

Conclusion :
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

5. L'unicité n'étant pas demandée, pour montrer l'existence de Δ , il suffit de la donner et vérifier qu'elle convient :

Soit $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Elle vérifie bien les trois contraintes : diagonales, coefs diagonaux croissants et carré égal à D .

6. On note $R = P\Delta P^{-1}$. On a alors $R = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = A$

$$P\Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix} = R$$

Et on prend le temps de vérifier que $R^2 = A \dots$

Bilan : rang d'une matrice HP. classique, les calculs ne sont pas trop lourds

Partie II : Étude d'endomorphismes

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et on considère les endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans $\mathcal{B}$ sont respectivement A et R .

On note $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ telle que P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

1. On a $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$ et $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = P$

Donc, d'après la formule de changement de base $\text{mat}_{\mathcal{C}}(f) = \text{mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = P^{-1}AP = D$

et de même $\text{mat}_{\mathcal{C}}(g) = \text{mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) \text{mat}_{\mathcal{B}}(g) \text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = P^{-1}RP = \Delta$

2. a) $\ker(f)$ est le sous espace propre associé à la valeur propre 0

Donc $\ker(f) = \text{Vect}((1, -1, 0))$ et comme $((1, -1, 0))$ est libre (un vecteur non nul) elle forme une base de $\ker(f)$ et $\dim \ker(f) = 1$

- b) Le théorème du rang donne alors $\dim \text{Im}(f) = 3 - 1 = 2$

Et comme $f(e_1) = (1, 1, 1)$ première colonne de A et $f(e_3) = (1, 1, 3)$ forment une famille libre (2 vecteurs non proportionnels) de $\text{Im}(f)$, ils forment une base de $\text{Im}(f)$

3. En inversant l'ordre des questions a) et b) :

$(g(e_1), g(e_2), g(e_3))$ est génératrice de $\text{Im}(g)$ et comme $g(e_1) = (2/3, 2/3, 1/3) = g(e_2)$ alors $(g(e_1), g(e_3))$ est génératrice de $\text{Im}(g)$, et de plus libre.

Conclusion : $(g(e_1), g(e_3))$ est donc une base de $\text{Im}(g)$ et $\dim(\text{Im}(g)) = 2$

Par le théorème du rang, $\dim(\ker(g)) = 1$ et on constate que $\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 5/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $g((1, -1, 0)) = 0$

Donc $((1, -1, 0))$ est une famille libre de 1 vecteur de $\ker(g)$

Conclusion : $((1, -1, 0))$ est une base de $\ker(g)$ et $\dim \ker(g) = 1$

4. La relation $g = f \circ h$. est équivalente à l'égalité de leurs matrices dans $\mathcal{C}$: $\text{mat}_{\mathcal{C}} g = \text{mat}_{\mathcal{C}} f \circ h = \text{mat}_{\mathcal{C}} f \text{mat}_{\mathcal{C}} h$.

On cherche donc une matrice H , inversible pour que h soit un automorphisme, telle que $\Delta = DH$

Pour rester dans l'esprit du sujet, on cherche H diagonale :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ donc } H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ qui est inversible convient.}$$

Et l'application linéaire h associée à H dans $\mathcal{C}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $g = f \circ h$.
Sa matrice dans $\mathcal{B}$ (puisqu'elle est demandée) est alors $\text{mat}_{\mathcal{B}}(h) = PHP^{-1}$ d'après la formule de changement de base.

Bilan : la dimension de $\text{Im}(f)$ aurait pu être demandé en premier. Et dans la question 3, l'ordre inverse aurait été le bienvenu !

Avec un peu d'originalité pour finir... exercice complet sur l'algèbre.

Exercice 3

Les deux parties sont indépendantes.

Soit $p \in]0; 1[$. On note. $q = 1 - p$

Partie I Différence de deux variables aléatoires.

Soit n un entier naturel non nul. On considère n joueurs qui visent une cible. Chaque joueur effectue deux tirs. À chaque tir, chaque joueur a la probabilité p d'atteindre la cible. Les tirs sont indépendants les uns des autres.

On définit. la variable aléatoire X égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au premier tir et la variable aléatoire Z égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au moins une fois à l'issue des deux tirs.

1. X (qui ne s'intéresse qu'au premier essai) est le nombre de joueurs, parmi n , atteignant la cible au premier essai, indépendamment les uns des autres et avec une même probabilité p .

Conclusion : $\text{Donc } X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \text{ et } E(X) = np, V(X) = npq.$

2. Pour chaque joueur, la probabilité de ne pas atteindre la cible (E_i pour échec au $i^{\text{ème}}$ essai) est $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2) = q^2$ par indépendance.

Donc la probabilité de l'atteindre au moins une fois est $P(\overline{E_1 \cap E_2}) = 1 - q^2$ et comme précédemment,

Conclusion : $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1 - q^2), E(Z) = n(1 - q^2) \text{ et } V(Z) = nq^2(1 - q^2)$

On note $Y = Z - X$.

3. Y est donc le nombre de joueur atteignant au moins une fois la cible, mais pas la première fois : C'est le nombre de ceux l'atteignant uniquement la seconde fois.

Pour chaque joueur, la probabilité en est $P(E_1 \cap S_2) = P(E_1)P(S_2) = pq$ par indépendance.

Conclusion : $\text{Donc } Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, pq).$

4. a) X et Y ne sont pas indépendantes :

$$(X = n \cap Y = n) \text{ est impossible donc } P(X = n \cap Y = n) = 0 \neq P(X = n)P(Y = n)$$

b) Calculer la covariance du couple (X, Y) . ??? par quel bout prendre la question ?

Si on part de la définition $\text{cov}(X, Y) = E(X)E(Y) - E(XY)$ demande d'aller chercher la loi du couple pour obtenir $E(X, Y)$: laborieux.

On cherche donc la covariance là où elle intervient : $V(Z) = V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$ donc

$$\begin{aligned}\text{cov}(X, Y) &= \frac{1}{2} (V(Z) - V(Y) - V(X)) \\ &= \frac{1}{2} (npq^2(1 - q^2) - npq(1 - pq) - npq) \text{ factorisé} \\ &= \frac{1}{2} npq(q(1 - q)(1 + q) - p(1 - pq) - p) \\ &= \frac{1}{2} npq(q(1 + q) - 1 + pq - 1) \text{ tout en } q \\ &= \frac{1}{2} npq(q + q^2 - 2 + (1 - q)q) \\ &= -np^2q\end{aligned}$$

N.B. la covariance négative est cohérente : plus X est grand, plus Y risque d'être petit.

Bilan : début nécessitant de comprendre les notations, et fin subtile.

Partie II : Variable aléatoire à densité conditionnée par une variable aléatoire discrète

Dans cette partie, on note U une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p .

1. **N.B.** Pour donner la loi, ne pas oublier de donner les valeurs possibles.

On a $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P(U = n) = q^{n-1}p$, $E(U) = \frac{1}{p}$ et $V(U) = \frac{q}{p^2}$

On considère une variable aléatoire T telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0; +\infty[, P_{(U=n)}(T > t) = e^{-nt}$

2. a) $(U = n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, donc

$$\begin{aligned}P(T > t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P_{(U=n)}(T > t) P(U = n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} q^{n-1} p \text{ pour } t \in [0; +\infty[\\ &= \frac{p}{q} \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-t} q)^n \\ &= \frac{p}{q} e^{-t} q \frac{1}{1 - e^{-t} q} \text{ car } |e^{-t} q| < 1\end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{\forall t \in [0; +\infty[, P(T > t) = \frac{p e^{-t}}{1 - q e^{-t}}}$$

b) La fonction de répartition de T est donc donnée par :

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - \frac{p e^{-t}}{1 - q e^{-t}} \text{ pour tout } t \geq 0$$

et comme F (fonction de répartition) est croissante et positive et que $F(0) = 1 - \frac{p}{1 - q} = 0$ alors $F(t) = 0$ pour tout $t < 0$

c) F est donc continue

- sur $[0; +\infty[$ car $1 - q e^{-t} \neq 0$
- sur $] -\infty, 0[$ fonction nulle
- en 0^- car $F(t) = 0 \rightarrow 0 = F(0)$

Donc la fonction de répartition de T est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et T est à densité.

Une densité est F' là où F est C^1

pour $t > 0 : F(t) = 1 - \frac{p e^{-t}}{1 - q e^{-t}}$ et

$$\begin{aligned} F'(t) &= -p \frac{-e^{-t}(1 - qe^{-t}) - qe^{-t}e^{-t}}{(1 - qe^{-t})^2} \\ &= \frac{pe^{-t}}{(1 - qe^{-t})^2} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{pe^{-t}}{(1 - qe^{-t})^2} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

3. On note $Z = UT$

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in [0; +\infty[,$

$$\begin{aligned} P_{(U=n)}(Z > z) &= P_{(U=n)}(UT > z) \\ &= P_{(U=n)}(T > z/n) \\ &= e^{-nz/n} \\ &= e^{-z} \end{aligned}$$

b) Intuitivement : la probabilité $P_{(U=n)}(Z > z)$ est la même pour toute valeur de U : elle est "indépendante" de U et $P(Z > z) = e^{-z}$.

Rigoureusement, on repasse par les probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(Z > z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(U = n) P_{(U=n)}(Z > z) \\ &= e^{-z} \sum_{n=1}^{+\infty} P(U = n) \\ &= e^{-z} \text{ car } (U = n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ SCE} \end{aligned}$$

La fonction de répartition de Z est donc

$$G(z) = \begin{cases} 1 - e^{-z} & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases} \quad \text{où l'on reconnaît que } \boxed{Z \text{ suit une loi } \varepsilon(1)}$$

c) On retrouve ici la problématique de l'indépendance :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in [0; +\infty[,$

$$\begin{aligned} P(U = n, Z > z) &= P(U = n) P_{U=n}(Z > z) \\ &= P(U = n) e^{-z} \\ &= P(U = n) P(Z > z) \end{aligned}$$

Bilan : joli exercice