Corrigé (ECRICOME 2000) par Pierre Veuillez

E est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 3. On désigne par f l'application qui à un polynôme P de E associe le polynôme $f(P)$ défini par:

$$f(P)(X) = P(X+1) + P(X)$$

1. f est définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ et on a bien $f(P)$ qui est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3

   Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ et α et β deux réels. On a alors pour tout réel x :

   $f(\alpha P+\beta Q)(x) = (\alpha P + \beta Q)(x+1) + (\alpha P + \beta Q)(x) = \alpha(P(x+1) - P(x)) + \beta(Q(x+1) - Q(x))$
   $= \alpha f(P)(x) + \beta f(Q)(x)$.

   Donc $f(\alpha P + \beta Q) = \alpha f(P) + \beta f(Q)$ et f est bien linéaire de E dans$E$ donc un endomorphisme de E.

2. On note $\mathcal{B}$ la base usuelle de E constituée, dans cet ordre des quatre polynômes 1, X, X^2, X^3. Pour avoir la matrice de f, on calcule les images des vecteurs de la base, puis leurs coordonnées :

   $f(1)(x) = 1(x+1) + 1(x) = 1$ donc $f(1) = 1$ coordonnées : $(1,0,0,0)$

   $f(X)(x) = X(x+1) + X(x) = x+1+x$ donc $f(X) = 2X+1$ coordonnées : $(1,2,0,0)$

   $f(X^2)(x) = X^2(x+1) + X^2(x) = (x+1)^2 + x^2 = 2x^2 + 2x + 1$ donc $f(X) = 2X^2 + 2X + 1$ coordonnées : $(1,2,2,0)$

   $f(X^3)(x) = X^3(x+1) + X^3(x) = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ donc $f(X^3) = 2X^3 + 3X^2 + 3X + 1$ coordonnées : $(1,3,3,2)$

   et on a donc bien pour matrice de f dans la base $\mathcal{B}$: $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. Comme les coordonnées dans $\mathcal{B}$ de $f(\mathcal{B}) = (f(1), f(X), f(X^2), f(X^3))$ sont échelonnées, c'est une famille libre donc une base (cardinal=4)

   Donc M est une matrice de passage et est inversible. Donc f est n automorphisme (bijective)

4. La matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$ est l'inverse de la matrice de f dans cette même base.

   $$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L1 - L4/2 \\ L2 - 3L4/2 \\ L3 - 3L4/2 \\ L4/2 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L1 - L3/2 \\ L2 - L3 \\ L3/2 \end{array}$$

   $$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L1 - L2/2 \\ L2/2 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

   $$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/4 & 0 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \text{ donc } M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

5. Soit P un élément de E défini par : $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$.

a) Les coordonnées de $f^{-1}(P)$ sont le produit de la matrice de f^{-1} par la matrice des coordonnées de P :

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4a_0 - 2a_1 + a_3 \\ 4a_1 - 4a_2 \\ 4a_2 - 6a_3 \\ 4a_3 \end{pmatrix}$$

et donc $Q = \frac{1}{8}\left[(4a_0 - 2a_1 + a_3) + (4a_1 - 4a_2)\,X + (4a_2 - 6a_3)\,X^2 + 4a_3X^3\right]$

b) On considère pour tout entier strictement positif n la somme

$$S(n) = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k P(k)$$

On fait réapparaître Q dans cette écriture : Comme $Q = f^{-1}(P)$ alors $P = f(Q)$
Donc

$$\begin{aligned} S(n) = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k P(k) &= \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k f(Q)(k) \\ &= \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k \left[Q(k+1) + Q(k)\right] \\ &= \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k Q(k+1) + \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k Q(k) \end{aligned}$$

on réindexe alors la première somme :

$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{k=2}^{h=n+1} (-1)^{h-1} Q(h) + \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k Q(k) \\ &= -\sum_{k=2}^{k=n+1} (-1)^k Q(k) + \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k Q(k) \\ &= -(-1)^{n+1}\,Q(n+1) + (-1)^1\,Q(1) \\ &= (-1)^n\,Q(n+1) - Q(1) \end{aligned}$$

c) Or $Q(1) = \frac{1}{8}\left[(4a_0 - 2a_1 + a_3) + (4a_1 - 4a_2) + (4a_2 - 6a_3) + 4a_3\right] = \frac{1}{8}\left[4a_0 + 2a_1 - a_3\right]$
et

$$\begin{aligned} Q(n+1) &= \frac{1}{8}\left[(4a_0 - 2a_1 + a_3) + (4a_1 - 4a_2)(n+1) + (4a_2 - 6a_3)(n+1)^2 + 4a_3(n+1)^3\right] \\ &= \frac{1}{8}\left[(4a_0 + 2a_1 - a_3) + (4a_1 + 4a_2)\,n + (4a_2 + 6a_3)\,n^3 + 4a_3n^3\right] \end{aligned}$$

d'où finalement

$$S(n) = \frac{(-1)^n\left[(4a_0 + 2a_1 - a_3) + (4a_1 + 4a_2)\,n + (4a_2 + 6a_3)\,n^3 + 4a_3n^3\right] - \left[4a_0 + 2a_1 - a_3\right]}{8}$$

(ECRICOME 2000)