EDHEC 2000

Soit la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On note E l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $MK = KM = M$.

1. a) Montrer que E est un espace vectoriel.

   b) Montrer par l'absurde qu'aucune matrice de E n'est inversible.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ une matrice de E.

   a) Montrer que $k = g = c = a$, $h = b$ et $f = d$, puis en déduire la forme des matrices de E.

   b) Retrouver le fait que les matrices de E ne sont pas inversibles.

   c) Déterminer une base de E et vérifier que $\dim E = 4$.

3. On considère l'ensemble F des mtrices de la forme $M = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$ où x, y et z sont des réels.

   a) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E et donner une base de F.

   b) Les matrices de F sont-elles diagonalisables ?

   c) Dans cette question on appelle U la matrice de F telle que : $x = 3$, $y = 2$ et $z = 4$.
   Trouver les valeurs propres de U et exhiber un vecteur colonne propre pour chacune d'entre elles.

4. On note φ l'application de F dans $\mathbb{R}$ qui à toute matrice A de F associe le nombre :

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} (-1)^{i+j} a_{i,j},$$

   où $a_{i,j}$ désigne l'élément de la matrice A situé à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ième}$ colonne.

   a) Montrer que φ est une application linéaire de F dans $\mathbb{R}$.

   b) Déterminer $\operatorname{Im}\varphi$. En déduire que $\operatorname{Ker}\varphi$ est de dimension 2.

   c) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$ une matrice de $\operatorname{Ker}\varphi$.
   Exprimer $\varphi(M)$ en fonction de x, y et z et en déduire une base de $\operatorname{Ker}\varphi$.