

E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Pour tout réel a , on considère l'endomorphisme f_a de E défini par :

$$f_a(e_2) = 0 \quad \text{et} \quad f_a(e_1) = f_a(e_3) = a e_1 + e_2 - a e_3$$

1. a) on paramètre $\text{Im}(f_a)$:

$$\begin{aligned} \text{Im}(f_a) &= \{ f_a(xe_1 + ye_2 + ze_3) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \} \\ &= \{ x f_a(e_1) + y f_a(e_2) + z f_a(e_3) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \} \\ &= \{ (x + z) f_a(e_1) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \} \\ &= \{ x f_a(e_1) / x \in \mathbb{R}^3 \} \\ &= \text{Vect}(f_a(e_1)) \end{aligned}$$

Donc $(f_a(e_1))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f_a)$ et libre (un seul vecteur non nul) donc une base.

$$\text{Donc } \dim(\text{Im}(f_a)) = 1$$

- b) Comme $\dim(E) = 3$, d'après le théorème du rang, $\dim(\ker f_a) = 3 - 1 = 2$

Il suffit donc de tester si les deux vecteurs donnés sont dans $\ker f_a$ et sont libres :

$$f_a(e_2) = 0 \text{ et } f_a(e_1 - e_3) = f_a(e_1) - f_a(e_3) \text{ car } f_a \text{ est linéaire et } f_a(e_1 - e_3) = 0$$

Donc ils appartiennent bien à $\ker f_a$

Comme (e_1, e_2, e_3) est une base elle est libre.

$$\text{Si } x e_2 + y (e_1 - e_3) = 0 \text{ alors } x = y = -y = 0$$

Donc $(e_2, e_1 - e_3)$ est une famille libre de $\ker f_a$ de deux vecteurs donc

Conclusion : $(e_2, e_1 - e_3)$ est une base de $\ker f_a$.

2. On a les coordonnées des images dans la base (e_1, e_2, e_3) donc

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}$$

$$\text{Et } A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A^2 est la matrice associée à $f_a \circ f_a$.

Conclusion : $f_a \circ f_a = 0$

3. On pose $e'_1 = f_a(e_1)$ $e'_2 = e_1 - e_3$ $e'_3 = e_3$

- a) Cette famille a trois vecteurs.

Reste à vérifier qu'elle est libre

$$\text{Si } x e'_1 + y e'_2 + z e'_3 = 0 \text{ alors } x f_a(e_1) + y (e_1 - e_3) + z e_3 = 0 \text{ avec } f_a(e_1) = a e_1 + e_2 - a e_3$$

$$\text{donc } (ax + y) e_1 + x e_2 + (-ax - y + z) e_3 = 0$$

et comme (e_1, e_2, e_3) est libre :

$$\begin{cases} ax + y = 0 \\ x = 0 \\ -ax - y + z = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ et la famille est libre}$$

Conclusion : $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E

b) On calcule les images de ces vecteurs puis leurs coordonnées dans $\mathcal{B}'$:

$$f_a(e'_1) = f_a(f_a(e_1)) = 0 \text{ car } f_a \circ f_a = 0$$

$$f_a(e'_2) = f_a(e_1 - e_3) = 0 \text{ car } e_1 - e_3 \in \ker f_a$$

$$f_a(e'_3) = f_a(e_3) = f_a(e_1) = e'_1 = 1e'_1 + 0e'_2 + 0e'_3$$

$$\text{Conclusion : } A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Comme A' est triangulaire, ses valeurs propres - donc celles de f_a - sont celles de la diagonale. Donc la seule valeur propre de f_a est 0.

Conclusion : la seule valeur propre de A est 0.

Comme 0 est valeur propre de A

Conclusion : A n'est pas inversible

Si A est diagonalisable, alors $A = P D P^{-1}$ avec D matrice diagonale, dont la diagonale contient les valeurs propres de A .

Donc $D = 0$ et $A = 0$

Conclusion : A n'est pas diagonalisable

4. Pour tout réel x non nul, on pose $B(x) = A - xI$, I désignant la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) On teste si 0 est valeur propre de $B : U$ matrice colonne.

Si $BU = 0$ alors $(A - xI)U = 0$ et $AU = xU$.

Et comme $x \neq 0$ n'est pas valeur propre de A alors $U = 0$

Donc 0 n'est pas valeur propre de A .

Conclusion : B est donc inversible

b) On développe $(A - xI)(A + xI) = A^2 - xIa + xAI - x^2I = -x^2I$

$$\text{Donc } B \frac{-1}{x^2} (A + xI) = \frac{-1}{x^2} (A + xI) B = I$$

$$\text{Conclusion : } B^{-1} = \frac{-1}{x^2} (A + xI)$$

c) On a $B = A - xI$

On le développe par le binôme : $A \cdot I = A = I \cdot A$

Donc, pour tout n entier,

$$\begin{aligned} B^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k (-xI)^{n-k} \text{ et pour } n \geq 2 \\ &= \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} A^k (-xI)^{n-k} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} 0 \\ &= (-x)^n I + n(-x)^{n-1} A \end{aligned}$$

et -surprise !- le résultat est encore vrai pour $n = -1$.