Corrigé EML 2003 par Pierre Veuillez

On note $\mathrm{e} = \exp(1)$, et $\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$.
On considère, pour tout nombre réel a non nul, l'application $f_a : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad f_a(x,y) = \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{y} - \frac{y}{a}$$

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes entre elles.

I. Première partie

Dans cette première partie, on prend $a = -\mathrm{e}$, et on note g à la place de $f_{-\mathrm{e}}$. Ainsi, l'application $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad g(x,y) = \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{y} + \frac{y}{e}$$

1. Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ on a $y \neq 0$.

   Donc la fonction $(x,y) \to \dfrac{1}{y}$ y est de classe C^2.

   Donc g est de classe C^2 comme produit et somme de fonctions C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

   (On peut détailler les fonctions coordonnées $(x,y) \to y$ composée avec la fonction inverse)

2. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{y}\left(e^{-x} - xe^{-x}\right) = \frac{(1-x)\,e^{-x}}{y} \\
\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= -\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{y^2} + \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

3. On résout alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{(1-x)\,e^{-x}}{y} = 0 \\ -\dfrac{x\mathrm{e}^{-x}}{y^2} + \dfrac{1}{e} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ -\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{y^2} + \dfrac{1}{e} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ \dfrac{1}{y^2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

   donc sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ le seul couple (x,y) (avec $y > 0$) en lequel les deux dérivées partielles d'ordre 1 de g s'annulent, est $(1,1)$.

4. Comme $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ est un ouvert, si g a un extremum, les dérivées partielles d'ordre 1 s'y annulent.

   Donc le seul extremum possible est $(1,1)$

   Pour savoir si c'est effectivement un extremum local, on calcule d'abord les dérivées partielles secondes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{-e^{-x} - (1-x)\,e^{-x}}{y} = \frac{(-2+x)\,e^{-x}}{y} \\
\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) &= -\frac{(1-x)\,e^{-x}}{y^2} \\
\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) &= 2\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{y^3}
\end{aligned}$$

et leurs valeurs en $(1,1)$:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,1) = \frac{-1}{e} \\ s &= \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(1,1) = 0 \\ t &= \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1,1) = \frac{2}{e} \end{aligned}$$

et le déterminant $rt - s^2 = -2/e^2 < 0$ prouve que g n'a pas d'extremum local et donc pas d'extremum global.

II. Seconde partie

Dans cette seconde partie, on prend $a = 1$.
On considère, pour tout entier n tel que $n \geqslant 1$, l'application $h_n :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad h_n(x) = f_1(x, x^n) = \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{x^n} - x^n$$

et l'application $\varphi_n :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad \varphi_n(x) = \mathrm{e}^{-x} - x^{2n-1}$$

1. Soit n supérieur ou égal à 1 et $x \in]0;+\infty[$. (l'important étant que $x \neq 0$)

$$\begin{aligned} h_n(x) = 0 &\iff \frac{xe^{-x}}{x^n} - x^n = 0 \iff \frac{xe^{-x}}{x^n} = x^n \\ &\iff xe^{-x} = x^{2n} \iff e^{-x} = x^{2n-1} \\ &\iff \varphi_n(x) = 0 \end{aligned}$$

donc

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad h_n(x) = 0 \iff \varphi_n(x) = 0$$

2. On étudie le solutions sur $]0,1[$ de $\varphi_n(x) = 0$ par le théorème de bijection :

φ_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi_n'(x) = -e^{-x} - (2n-1)x^{2n-2} < 0$ (pour la formule de dérivée de la puissance, on vérifie que $2n - 1 \neq 0$)

Donc φ_n est strictement décroissante et continue donc bijective de $]0,1[$ dans $]\lim_1 \varphi_n, \lim_0 \varphi_n[= \left]\frac{1-e}{e}, 1\right[$

Comme $0 \in \left]\frac{1-e}{e}, 1\right[$, l'équation $\varphi_n(x) = 0$ a donc une unique solution u_n sur $]0,1[$.

Comme φ_n est strictement décroissante, elle n'en a pas d'autres sur $]0,+\infty[$

Donc d'après l'équivalence $\varphi_n(x) = 0 \iff h_n(x) = 0$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'équation $h_n(x) = 0$, admet une solution et une seule, notée u_n, et que $0 < u_n < 1$

3. On a $\varphi_{nn}(u_n) = 0$ donc $e^{-u_n} - {u_n}^{2n-1} = 0$ et $e^{-u_n} = {u_n}^{2n-1}$ et comme $u_n > 0$ on a alors $\ln(e^{-u_n}) = (2n-1)\ln(u_n)$ d'où finalement $\ln(u_n) = -\dfrac{u_n}{2n-1}$.

4. Comme $0 < u_n < 1$ et que $2n - 1 > 0$, on a l'encadrement $0 < -\dfrac{u_n}{2n-1} < \dfrac{1}{2n-1}$

et par encadrement $-\dfrac{u_n}{2n-1} = \ln(u_n) \to 0$.

D'où finalement $u_n = e^{\ln(u_n)} \to e^0 = 1$ (par continuité de exp)