

Préliminaire

On donne : $0,69 < \ln 2 < 0,70$.

On considère l'application :

$$g :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) = x^2 + \ln x$$

1. g est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ (somme de fonctions continues) et $g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$
 En 0 : $g(x) = x^2 + \ln x \rightarrow -\infty$ et en $+\infty$: $g(x) = x^2 + \ln x \rightarrow +\infty$

Conclusion : g est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$

2. g est donc bijective de $]0; +\infty[$ dans $]\lim_0 g; \lim_{+\infty} g[= \mathbb{R}$

Comme $0 \in \mathbb{R}$ alors

Conclusion : l'équation $g(x) = 0$, admet une solution et une seule.

On note α l'unique solution de cette équation.

3. On a $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 0,25 - \ln(2) < 0$ car $0,69 < \ln 2 < 0,70$
 et $g(1) = 1 + \ln 1 = 1$

Donc $g\left(\frac{1}{2}\right) < g(\alpha) < g(1)$ et comme g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et que $\frac{1}{2}$, α et 1 en sont éléments

Conclusion : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

Partie A

On note $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et on considère l'application :

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\ln x$$

1. a) f est dérivable sur I et

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4x} \\ &= \frac{4x - 2x^2 - 1}{4x} \end{aligned}$$

avec $-2x^2 + 4x - 1$ du second degré de discriminant : $\Delta = 16 - 8 = 8$ et pour racines :
 $x_1 = \frac{-4 - \sqrt{8}}{-4} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} > 1$ et $x_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{2}$

Donc $-2x^2 + 4x - 1 > 0$ (signe opposé à -2) sur $]x_2; x_1[$ et donc sur I

Conclusion : f est strictement croissante sur I .

- b) On peut remarque que $f(x) - x = -\frac{1}{4}g(x)$ donc

x	$\frac{1}{2}$	α	1
$g(x)$	$- \nearrow$	0	$\nearrow +$
$f(x) - x$	$+$		$-$
	$f(x) > x$	$f(x) = x$	$f(x) < x$

Donc $f\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}$ et $f(1) < 1$ et comme f est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ alors
 $f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1)$

Conclusion : $\frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1) < 1$

- c) Et comme f est strictement croissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$, si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ alors $f(\frac{1}{2}) \leq f(x) \leq f(1)$
 et $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq f(1)$
 d'où $f(x) \in I$

Conclusion : $\boxed{\forall x \in I, f(x) \in I.}$

2. On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

- a) On a $u_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

- b) En utilisant que $\forall x \in I, f(x) \in I$, par récurrence :

– $u_0 \in I$

– Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in I$ alors $f(u_n) \in I$ et $u_{n+1} \in I$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : u_n \in I}$

- c) Pour utiliser le signe de $f(x) - x$, il faudrait montrer tout d'abord que $u_n \geq \alpha$.

Ici, on montre par récurrence :

– $u_1 = \frac{3}{4} \leq u_0$

– Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq u_{n+1}$ alors $f(u_n) \geq f(u_{n+1})$ car f est strictement décroissante sur I et que u_n et u_{n+1} en sont éléments.

Donc $u_{n+1} \geq u_{n+2}$

Conclusion : $\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$

- d) La suite u est donc décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$ donc elle est convergente vers une limite ℓ .

Comme pour tout $n \in \mathbb{N} : \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ alors $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1$.

Donc f est continue en ℓ et $f(\ell) = \ell$.

Or pour $x \in I : f(x) - x = -\frac{1}{4}g(x)$ donc $f(x) - x = 0 \iff g(x) = 0 \iff x = \alpha$

Conclusion : $\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge et sa limite est le réel } \alpha.}$

Partie B

On considère l'application :

$$F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto F(x, y) = x e^y + y \ln x$$

1. a) Les fonctions coordonnées $(x, y) \rightarrow x$ est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ donc $(x, y) \rightarrow \ln x$ est C^1 en $x > 0$ donc sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$
 et F est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ comme somme de fonctions C^1 , et on a :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = e^y + \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x e^y + \ln x$$

- b) (x, y) est un point critique si et seulement si $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0$

$$\iff \begin{cases} e^y + \frac{y}{x} = 0 \\ x e^y + \ln x = 0 \end{cases} \quad L_2 - xL_1$$

$$\iff \begin{cases} e^y + \frac{y}{x} = 0 \\ \ln x - y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + \frac{\ln(x)}{x} = 0 \\ y = \ln x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 + \ln(x) = 0 \\ y = \ln x \end{cases}$$

qui a pour unique solution dans $x = \alpha$ et $y = \ln(\alpha)$

Conclusion : le seul point critique de F est $(\alpha, \ln(\alpha))$.

2. F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}r &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{y}{x^2} \\s &= \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y) = e^y + \frac{1}{x} \\t &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = x e^y\end{aligned}$$

et au point critique on a $(\alpha, \ln(\alpha))$ on a

$$\begin{aligned}r &= -\frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} \\s &= \alpha + \frac{1}{\alpha} \\t &= \alpha^2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}rt - s^2 &= -\ln(\alpha) - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 \\&= -\frac{1}{\alpha^2} - \alpha^2 - \ln \alpha - 2 \\&= -\frac{1}{\alpha^2} - 2 < 0 \text{ car } \alpha^2 + \ln \alpha = 0\end{aligned}$$

Conclusion : sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, F n'a pas d'extremum local donc a fortiori, global.