

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}}$$

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2 \frac{e^t \sqrt{1+t^2} - e^t \frac{1}{2\sqrt{1+t^2}} (2t)}{\sqrt{1+t^2}^2} \\ &= 2e^t \frac{1+t^2-t}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} \end{aligned}$$

On étudie le signe du polynôme du second degré $t^2 - t + 1$ qui a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 < 0$
Donc pour tout $t \in \mathbb{R} : t^2 - t + 1 > 0$ et $f'(t) > 0$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Etude aux bornes :

En $-\infty : f(t) \rightarrow 0$

En $+\infty :$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2e^t}{\sqrt{t^2(1+1/t^2)}} = \frac{2e^t}{|t|\sqrt{(1+1/t^2)}} = \frac{e^t}{t} \frac{2}{\sqrt{(1+1/t^2)}} \\ &\rightarrow +\infty \text{ car } t = o(e^t) \end{aligned}$$

(L'étude des branches infinies n'était pas demandé, une seule valeur simple : en 0 où $f(0) = 2$)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(t)$	0	↗ 2 ↗	$+\infty$

2. a) Pour la première inégalité, on étudie les variations de la fonction :

$$g(t) = 2e^t - t - t^2$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(t) = 2e^t - 1 - 2t$

g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g''(t) = 2e^t - 2 = 2(e^t - 1)$, d'où

t	0	$+\infty$
$e^t - 1$	0	↗ +
$g''(t)$	0	+
$g'(t)$	1	↗ +
$g(t)$	2	↗ +

Et donc pour tout $t \in [0, +\infty[: 2e^t - t - t^2 > 0$

On résout la seconde équation : pour $t \geq 0$

$1+t \geq \sqrt{1+t^2} \iff (1+t)^2 \geq \sqrt{1+t^2}^2$ car la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
et que $1+t$ et $\sqrt{1+t^2}$ en sont éléments

$\iff 1+2t+t^2 \geq 1+t^2 \iff 2t \geq 0$ ce qui est vrai sur $\mathbb{R}^+$

Donc pour tout $t \in [0, +\infty[: 1+t \geq \sqrt{1+t^2}$

b) On résout à présent $f(t) > t$ pour $t \geq 0$:

$$\frac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}} > t \iff 2e^t > t\sqrt{1+t^2} \dots ?$$

On change d'angle d'attaque : $1 + t \geq \sqrt{1 + t^2}$ donc **si** $2e^t > t(1 + t)$ **alors** $2e^t > t\sqrt{1 + t^2}$:
 rédaction

Comme $2e^t - t - t^2 > 0$ alors $2e^t > t(1 + t)$

Comme $1 + t \geq \sqrt{1 + t^2}$ et $t \geq 0$ alors $t(1 + t) \geq t\sqrt{1 + t^2}$

Et donc $2e^t > t(1 + t) \geq t\sqrt{1 + t^2}$ et finalement $\frac{2e^t}{\sqrt{1 + t^2}} > t$ ou encore

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad f(t) > t$$

3. On considère la suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

a) Pour montrer que u_n tend vers $+\infty$, on montre d'abord qu'elle est croissante.

Et pour celà, on utilise que $f(t) > t$ pour $t \geq 0$ avec $t = u_n$.

- Il faut donc montrer d'abord que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 0$:

Comme $f > 0$ sur $\mathbb{R}$, on a $u_{n+1} = f(u_n) > 0$.

Donc si $n \geq 1$ alors $u_n \geq 0$ et de plus $u_0 \geq 0$

Donc pour tout entier n , $u_n \geq 0$

- On peut alors utiliser $u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$

La suite u est donc croissante.

En raisonnant ensuite l'absurde, on montre qu'elle n'est pas majorée par une constante :

Si u est majorée par une constante alors la suite est convergente vers une limite $\ell \geq 0$ (car $u_n \geq 0$)

Et comme f est continue en ℓ , on a alors $f(\ell) = \ell$. Or $f(\ell) > \ell$

Donc la suite u n'est pas majorée.

Elle est donc croissante et non majorée et tend donc vers $+\infty$.

b) Il faut calculer les valeurs successives de u_n et de n jusqu'à ce que $u_n > 10^{-6}$ (le plus petit entier n'est pas $n = 1$)

```
program prem;
```

```
var u:real;n:integer;
```

```
begin
```

```
  n:=0;u:=1;
```

```
  repeat
```

```
    u:=2*exp(u)/sqrt(1+sqr(u));n:=n+1;
```

```
  until u > 1E-6;
```

```
  writeln(n);
```

```
end.
```

4. On considère l'application $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$G(x) = \int_{-x}^{+x} f(t) dt$$

a) Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ alors G est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $G(-x) = \int_x^{-x} f(t) dt = -\int_{-x}^{+x} f(t) dt = -G(x)$

Donc G est impaire.

- b) Comme f est continue sur $J = \mathbb{R}$, que $x \rightarrow x$ et $x \rightarrow -x$ sont de classe C^1 sur $I = \mathbb{R}$ à valeur dans $J = \mathbb{R}$, alors G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$G'(x) = 1f(x) - (-1)f(-x) = f(x) + f(-x) = 2\frac{e^x + e^{-x}}{\sqrt{1+x^2}}$$

- c) Comme on ne sait pas primitiver f , on obtient la limite de G par minoration :

- Pour tout $t \leq 0$: $f(t) \geq 0$ donc pour $x > 0$ on a $-x < 0$ et $\int_{-x}^0 f(t) dt \geq 0$
- Pour tout $t \geq 0$: $f(t) \geq t$ donc pour $x > 0$ on a :
 $\int_0^{+x} f(t) dt \geq \int_0^{+x} t dt = x^2/2$

Donc pour tout $x > 0$ on a $G(x) \geq x^2/2$ et par minoration, $G(x) \rightarrow +\infty$ quand x tend vers $+\infty$?

- d) Comme $G'(x) = 2\frac{e^x + e^{-x}}{\sqrt{1+x^2}}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ alors G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

En 0 elle est nulle (soit $\int_0^0 f(t) dt = 0$, soit par imparité $G(-0) = -G(0)$ donc $2G(0) = 0$ et $G(0) = 0$) sa dérivée y vaut 4 (pente de la tangente)

En $+\infty$, G tend vers $+\infty$ donc par imparité, G tend vers $-\infty$ en $-\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$G(t)$	$-\infty$	$\nearrow 0 \nearrow$	$+\infty$