Corrigé HEC 1994 par Pierre Veuillez

1. Pour tout entier n on note f_n la fonction définie sur [0,1] par:

$$f_n(x) = \int_0^x e^{nt^2} dt - \int_x^1 e^{-nt^2} dt.$$

a) i. La fonction $t \to e^{nt^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \to \int_0^x e^{nt^2} dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (pour x et $0 \in \mathbb{R}$)
La fonction $t \to e^{-nt^2}$ également et les bornes de l'intégrales sont dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc $x \to \int_x^1 e^{-nt^2} dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc f_n est dérivable sur $\mathbb{R} \cap [0,1]= [0,1]$

ii. Et

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= e^{nx^2} \cdot 1 - e^{n0^2} \cdot 0 - e^{-n1^2} \cdot 0 + e^{nx^2} \cdot 1 \\ &= e^{nx^2} + e^{-nx^2} > 0 \end{aligned}$$

b) L'équation est équivalente à $f_n(x) = 0$.
Comme f_n est dérivable elle est continue et strictement croissante sur $[0,1]$ donc bijective de $[0,1]$ dans $[f_n(0), f_n(1)]$
Reste à déterminer leur signes :

$$f_n(0) = \int_0^0 e^{nt^2} dt - \int_0^1 e^{-nt^2} dt = -\int_0^1 e^{-nt^2} dt$$

et comme $e^{nt^2} \geq 0$ et que $0 \leq 1$ en intégrant l'inégalité, on obtient $f_n(0) \leq 0$ et de la même façon $f_n(1) \geq 0$.
Donc $0 \in [f_n(0), f_n(1)]$ et l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution sur $[0,1]$. Donc il existe un unique c_n tel que

$$\int_0^{c_n} e^{nt^2} dt - \int_{c_n}^1 e^{-nt^2} dt = 0$$

c_0 est celui qui vérifie :

$$\begin{aligned} \int_0^{c_0} e^{0t^2} dt - \int_{c_0}^1 e^{-0t^2} dt = 0 &\Leftrightarrow [t]_0^{c_0} - [t]_{c_0}^1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2c_0 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow c_0 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

c) On ne connaît pas c_n mais seulement le fait qu'il soit solution de l'équation. Pour comparer c_n et c_{n+1} on comparera donc leurs images par f_n ou f_{n+1} :Comme $f_n(c_n) = 0$ et $f_{n+1}(c_{n+1}) = 0$, comparons $f_{n+1}(c_n)$ et $f_{n+1}(c_{n+1}) = f_n(c_n)$

$$\begin{aligned} f_{n+1}(c_n) &= \int_0^{c_n} e^{(n+1)t^2} dt - \int_{c_n}^1 e^{-(n+1)t^2} dt \\ f_n(c_n) &= \int_0^{c_n} e^{nt^2} dt - \int_{c_n}^1 e^{-nt^2} dt \end{aligned}$$

Or comme $n \leq n+1$ et que $t^2 \geq 0$ on a $nt^2 \leq (n+1)\,t^2$, exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $e^{nt^2} \leq e^{(n+1)t^2}$

comme $0 \leq c_n$ on a

$$\int_0^{c_n} e^{nt^2} dt \leq \int_0^{c_n} e^{(n+1)t^2} dt$$

De même

$$-\int_{c_n}^1 e^{nt^2} dt \leq -\int_{c_n}^1 e^{(n+1)t^2} dt$$

et finalement , $f_{n+1}(c_{n+1}) = f_n(c_n) \leq f_{n+1}(c_n)$ et comme f_{n+1} est strictement croissante sur $[0,1]$ et que c_n et c_{n+1} en sont éléments, on a bien finalement, $c_{n+1} \leq c_n$.

Donc la suite c est décroissante et minorée par 0 (pour tout n : $c_n \in [0,1]$) donc elle converge et sa limite $\ell \in [0,1]$ par passage à la limite dans les inégalités.

d) i. On étudie les variations de $g(x) = e^x - x$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^x - 1$

x	$\qquad 0$
$e^x - 1$	$- \nearrow \quad 0 \quad \nearrow +$
$g(x)$	$\searrow \quad 1 \quad \nearrow +$

donc pour tout x réel : $e^x > x+1$ et $e^{nt^2} > nt^2$ d'où, pour $0 \leq r$:

$$\int_0^r e^{nt^2} dt \geq \int_0^r nt^2 dt = n\frac{r^3}{3} \to +\infty$$

Conclusion : $\boxed{\text{par minoration, } \lim_{n\to+\infty} \int_0^r e^{nt^2} dt = +\infty}$

ii. Comme $-nt^2 \leq 0$ et que exp est croissante sur $\mathbb{R}$ alors $e^{-nt^2} \leq e^0 = 1$. Comme $c_n \leq 1$, par intégration de l'inégalité on obtient :

$$\int_{c_n}^1 e^{-nt^2} dt \leq \int_{c_n}^1 1dt = [t]_{c_n}^1 = 1 - c_n \leq 1$$

car $c_n \geq 0$.

iii. Finalement on a

$$\int_0^{c_n} e^{nt^2} dt = \int_{c_n}^1 e^{-nt^2} dt \leq 1$$

Donc **si** $\ell > 0$ on a alors pour tout entier n : $c_n \geq \ell$ et

$$\begin{aligned} \int_0^{c_n} e^{nt^2} dt &= \int_0^{\ell} e^{nt^2} dt + \int_{\ell}^{c_n} e^{nt^2} dt \\ &\geq \int_0^{\ell} e^{nt^2} dt \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty \end{aligned}$$

et par minoration $\int_0^{c_n} e^{nt^2} dt \to +\infty$ en étant inférieur à 1, il y a contradiction...
Donc $\ell \leq 0$ et comme $\ell \geq 0$ on a finalement $\ell = 0$

(HEC 94)