Corrigé EDHEC 2007 par Pierre Veuillez

1. a) On étudie les variations de $g(x) = x - \ln(x)$

   g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

x	0		1		
$x-1$		$-$	0	$+$	affine
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$+\searrow$	1	$\nearrow+$	

   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } x > 0 : g(x) > 0}$

   b) f est définie en 0 et en x tel que $x > 0$ et $x - \ln(x) \neq 0$.

   Conclusion : $\boxed{f \text{ est définie sur } [0,+\infty[}$

2. a) f est continue sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions continues.

   En 0 : pour $x > 0$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\ln(x)}{x-\ln(x)} \\
&= \frac{\ln(x)}{\ln(x)(-1+x/\ln(x))} \\
&= \frac{1}{-1+x/\ln(x)} \to -1 = f(0)
\end{aligned}$$

   Donc f est continue en 0.

   Conclusion : $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+}$

   b) Pour $x > 0$, le taux d'accroissement en 0 est :

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \frac{\frac{\ln(x)}{x-\ln(x)}+1}{x} \\
&= \frac{\ln(x)-\ln(x)+x}{x(x-\ln(x))} \\
&= \frac{1}{x-\ln(x)} \to 0
\end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\text{Donc } f \text{ est dérivable en } 0^+ \text{ et } f'_d(0) = 0}$

3. a) Sur $]0,+\infty[$ on a $x - \ln(x) \neq 0$ donc f y est dérivable comme quotient de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(x-\ln(x))\frac{1}{x} - \ln(x)\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(x-\ln(x))^2} \\
&= \frac{x-\ln(x)-\ln(x)(x-1)}{x(x-\ln(x))^2} \\
&= \frac{x-x\ln(x)}{x(x-\ln(x))^2} \\
&= \frac{1-\ln(x)}{(x-\ln(x))^2}
\end{aligned}$$

b) En $+\infty$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(x)}{x-\ln(x)} \\ &= \frac{\ln(x)}{x(1-\ln(x)/x)} \\ &\to 0 \text{ car } \ln(x)=o(x) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{f(x)\to 0 \text{ quand } x\to+\infty}$

c) On a alors :

x	0		e		$+\infty$
$1-\ln(x)$		$+\searrow$	0	$\searrow -$	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

4. Comme $x-\ln(x)>0$ le signe de $f(x)$ est celui de $\ln(x)$ (et négatif en 0)

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	0	$+$	

5. Pour tout réel x élément de D on pose $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

a) Comme f est continue sur $\mathbb{R}^+$ alors F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $F'(x)=f(x)$ et donc F' est continue.

Conclusion : $\boxed{F \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^+}$ et son sens de variation est donné par le signe de f :

x	0		1		$+\infty$
$F'(x)=f(x)$	-1	$-$	0	$+$	
$F(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

b) Comme $\frac{\ln(t)}{t}\geq\frac{1}{t}\geq 0$ pour $t\geq e$ et que $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}dt$ diverge alors par minoration de fonction positive $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t}dt$ diverge et

Conclusion : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}dt=+\infty}$

N.B. on pouvait aussi primitiver (car $\frac{1}{x}$ est la dérivée de $\ln(x)$ par rapport à x) en $\frac{1}{2}(\ln(x))^2$

c) On a un équivalent en $+\infty$ en factorisant :

$$\begin{aligned} \frac{\ln(t)}{t-\ln(t)} &= \frac{\ln(t)}{t}\frac{1}{1-\ln(t)/t} \\ &\sim \frac{\ln(t)}{t}\geq 0 \end{aligned}$$

pour tout $t\geq 1$. Donc, par comparaison de fonctions positives, $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t-\ln(t)}dt$ diverge également et $\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{\ln(t)}{t}dt=+\infty$

Et donc

Conclusion : $\boxed{\lim_{+\infty}F=+\infty}$

Pour tracer une jolie courbe représentative, il faudrait en plus la direction asymptotique