Corrigé EML 2008 par Pierre Veuillez
On admet l'encadrement suivant : $2,7 < e < 2,8$..

Partie I : Étude d'une fonction

On considère l'application $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0,+\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t\ln(t) - t & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. f est continue sur $]0,+\infty[$ (produit somme de fonctions continues)
2. En 0^+ : pour $t > 0$: $f(t) = t\ln(t) - t \to 0$ car $t\ln(t) = \frac{\ln(t)}{1/t}$ et $\ln(t) = o\left(\frac{1}{t}\right)$
3. f est C^1 sur $]0,+\infty[$ (produit et somme de fonctions C^1)
   et pour tout $t \in]0,+\infty[$: $f'(t) = \ln(t) + 1 - 1 = \ln(t)$
4. Pour $t > 0$: $f(t) = t\ln(t)[1 - 1/\ln(t)] \to +\infty$ quand $t \to +\infty$
5. Pour tout $t > 0$ on a $f'(t) = \ln(t)$ d'où :

t	0		1		$+\infty$
$f'(t) = \ln(t)$		$\nearrow -$	0	$\nearrow +$	
$f(t)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

6. f est C^2 sur $]0,+\infty[$ et $f''(t) = \frac{1}{t} > 0$ donc f est convexe. sur $]0,+\infty[$ (Comme f est continue, on a également la convexité sur $[0,+\infty[$)
7. On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$

   a) Le taux d'accroissement en 0 est :
   $$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \ln(t) - 1 \to -\infty$$
   Donc Γ a une demi tangente verticale en 0.

   b) $f(t) = 0 \iff t(\ln(t) - 1) \iff t = 0$ ou $\ln(t) = 1$
   Conclusion : $\boxed{\text{les intersections sont en 0 et en } e}$

   c) On cherche une direction asymptotique en $+\infty$:
   $$\frac{f(t)}{t} = \ln(t) - 1 \to +\infty$$
   et on a donc une branche parabolique verticale.

   d) Il faut ici tracer la tangente verticale à l'origine, la tangente horizontale en 1, enfin celle en e où la pente est de $f'(e) = 1$ et la branche parabolique "au jugé"

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère l'application $G :]1\ ;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in]1\ ;+\infty[$, par :

$$G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$$

1. f étant continue sur $[0,+\infty[$ elle y possède une primitive F et donc pour $x+1$ et $x-1$ dans cet intervalle.
   Et pour $x>1$ (définition de$G$), $G(x)=\frac{1}{2}(F(x+1)-F(x-1))$.
   Donc G est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ (composée) $G'(x)=\frac{1}{2}(f(x+1)-f(x-1))$
   Cette fonction G' est elle même dérivable sur $]1\,;+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables (car $x+1$ et $x-1\geq 0$)
   et $G''(x)=\frac{1}{2}(f'(x+1)-f'(x-1))=\frac{1}{2}(\ln(x+1)-\ln(x-1))$
   Cette fonction étant continue, G est bien de classe C^2.
2. a) Pour tout $x>1: x+1>x-1>0$ donc $\ln(x+1)>\ln(x-1)$ (car ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$) et $G''(x)>0$
      Donc G' est strictement croissante sur $]1\,;+\infty[$
   b) On a $G'(2)=\frac{1}{2}(f(3)-f(1))=\frac{1}{2}(3\ln(3)-3+1)=\frac{1}{2}(3(\ln(3)-1)+1)$
      Et comme $e<3$ alors $\ln(e)<\ln(3)$ et donc $\ln(3)-1>0$ et $G'(2)>0$.
   c) On utilise le théorème de bijection :
      G' est continue et strictement croissante sur $]1;\ 2[$ donc bijective de $]1;\ 2[$ dans $]\lim_1 G';\lim_2 G'[$
      On a $G'(x)=\frac{1}{2}(f(x+1)-f(x-1))\rightarrow\frac{1}{2}(f(2)-f(0))$ car f est continue sur $[0,+\infty[$
      Or $2<e$ et donc $\ln(2)<1$ et $f(2)-f(0)=f(2)<0$
      Et on a $\lim_2 G'=G'(2)>0$ (car G' est continue)
      Donc $0\in\,]\lim_1 G';\lim_2 G'[$
      Donc l'équation $G'(x)=0$ a une unique solution α sur $]1,2[$.
      G' étant strictement croissante, elle n'en a pas d'autres sur $]1,+\infty[$.
      Donc l'équation $G'(x)=0$ admet une solution α et une seule et $\alpha<2$

Partie III : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère l'application $\Phi:\,]1\,;+\infty[^2\rightarrow\mathbb{R}$ définie, pour tout $(x,y)\in\,]1\,;+\infty[^2$, par :

$$\Phi(x,y)=(y-f(x+1))^2+(y-f(x-1))^2$$

où l'application f est définie dans la partie **I**.

1. Les fonctions coordonnées $(x,y)\rightarrow x$ et $y\rightarrow(x,y)$ sont C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
   et f est C^2 sur $]0,+\infty[$ donc Φ est C^2 en (x,y) tels que $x+1>0$ et $x-1>0$ comme composées de fonctions C^2.
   Donc Φ est de classe C^2 sur $]1\,;+\infty[^2$ (restriction imposée sur la seconde composante par l'énoncé)
   et pour tout (x,y) de $]1\,;+\infty[^2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y) &= -2(y-f(x+1))f'(x+1)-2(y-f(x-1))f'(x-1)\\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y) &= 2(y-f(x+1))+2(y-f(x-1))\end{aligned}$$

2. En $(\alpha, f(\alpha+1))$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial x}(\alpha, f(\alpha+1)) &= -2(f(\alpha+1)-f(\alpha+1))f'(\alpha+1) - 2(f(\alpha+1)-f(\alpha-1))f'(\alpha-1) \\
&= -4G'(\alpha) f'(\alpha-1) \\
&= 0 \\
\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) &= 2(f(\alpha+1)-f(\alpha+1)) + 2(f(\alpha+1)-f(\alpha-1)) \\
&= 4G'(\alpha) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $(\alpha, f(\alpha+1))$ est bien un point critique de Φ.

3. On calcule les dérivées partielle secondes :

$$\begin{aligned}
r(x,y) &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x,y) \\
&= 2f'(x+1)^2 - 2(y-f(x+1))f''(x+1) \\
&\quad +2f'(x-1)^2 - 2(y-f(x-1))f''(x-1) \\
s(x,y) &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}(x,y) \\
&= -2(f'(x+1)+f'(x-1)) \\
t(x,y) &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}(x,y) \\
&= 4
\end{aligned}$$

et en $(\alpha, f(\alpha+1))$:

$$\begin{aligned}
r &= 2f'(\alpha+1)^2 + 2f'(\alpha-1)^2 - 2(f(\alpha+1)-f(\alpha-1))f''(\alpha-1) \\
&= 2f'(\alpha+1)^2 + 2f'(\alpha-1)^2 \text{ car } f(\alpha+1) = f(\alpha-1) \\
s &= -2(f'(\alpha+1)+f'(\alpha-1)) \\
t(x,y) &= 4
\end{aligned}$$

et on a donc

$$\begin{aligned}
rt - s^2 &= 4\left[2f'(\alpha+1)^2 + 2f'(\alpha-1)^2 - \left(f'(\alpha+1)^2 + f'(\alpha-1)^2 + 2f'(\alpha+1)f'(\alpha-1)\right)\right] \\
&= 4\left[f'(\alpha+1)^2 + f'(\alpha-1)^2 - 2f'(\alpha+1)f'(\alpha-1)\right] \text{ Remarquable!} \\
&= 4\left[f'(\alpha+1) - f'(\alpha-1)\right]^2
\end{aligned}$$

enfin, comme $1 < \alpha < 2$ alors $0 < \alpha - 1 < 1$ et $f'(\alpha-1) = \ln(\alpha-1) < 0$
d'autre part $\alpha + 1 > 2$ donc $f'(\alpha+1) > 0$ et finalement $f'(\alpha+1) - f'(\alpha-1)^2 > 0$ et $rt - s^2 > 0$.
On a donc un extremum local sur l'ouvert $]1; +\infty[^2$ qui est un minimum puisque $t > 0$.