Corrigé (ESC 1999) par Pierre Veuillez

Partie A : étude d'une fonction.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \ln(1+x^2)$.

1. L'ensemble de définiton de f est $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $-x \in \mathbb{R}$ et : $f(-x) = \ln(1+x^2) = f(x)$ donc f est une fonction paire

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x/(1+x^2)$ est dusigne de x. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$

   f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

   Etudier les variations de f et préciser les limites en $+\infty$.

3. On a en factorisant pour tout $x > 0$:
$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(x^2\left(1+1/x^2\right)\right) = \ln\left(x^2\right) + \ln\left(1+1/x^2\right) \\ &= 2\ln(x)\left(1 + \frac{\ln(1+1/x^2)}{2\ln(x)}\right) \end{aligned}$$
   et comme la parenthèse tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$ on a bien $f(x) \sim 2\ln x$
   $\mathcal{C}$ a donc une branche parabolique horizontale en $+\infty$. ($f(x)/x \sim 2\ln(x)/x \to 0$ car $\ln(x) \ll x$)

4. Pour etudier la concavité de $\mathcal{C}$ on détermine le signe de f''. f' est dérivable sur $\mathbb{R}$
$$f''(x) = 2\frac{1+x^2-2x\cdot x}{(1+x^2)^2} = 2\frac{(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$
   Donc f'' est dusigne de $1-x^2$ polynôme du second degré de racines 1 et -1

   On a donc $f'' < 0$ sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ et $\mathcal{C}$ y est concave et $f'' > 0$ sur $]-1,1[$ et $\mathcal{C}$ y est convexe.

   $\mathcal{C}$ a donc deux points d'inflexions en -1, ordonnée : $f(-1) = \ln(2)$ et 1 de même ordonnée.

   La tangente y a une pente de $f'(1) = 2/2 = 1$

5. Il faut respecter la symétrie des fonctions paires, la tagente horizontale en 0, placer les points d'inflexion avec leurs tangentes et enfin donner la bonne concavité en $\pm\infty$.

Partie B : étude d'une intégrale.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}\, dx$.

1. $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx = \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2)$

2. a) On a :
$$\begin{aligned} I_0 + I_1 &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx + \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\, dx = \int_0^1 \frac{x+x^3}{1+x^2}\, dx \\ &= \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) Donc $I_1 = \frac{1}{2} - I_0 = \frac{1}{2}(1 - \ln(2))$

3. a) Comme $\frac{x^{2n+1}}{1+x^2} \geq 0$ sur $[0,1]$ et que $0 \leq 1$ on a alors $I_n \geq 0$

b) On a :

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n+1} + x^{2n+3}}{1+x^2}\, dx = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}(1+x^2)}{1+x^2}\, dx$$
$$= \int_0^1 x^{2n+1} dx = \left[\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+2}$$

c) Comme $I_{n+1} \geq 0$ on a alors $\quad I_n = \frac{1}{2n+2} - I_{n+1} \leq \frac{1}{2n+2}$

d) On a donc pour tout entier n : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+2}$ et par encadrement $I_n \to 0$

Partie C : étude d'une série

1. a) On démontre par récurrence en utilisant le fait que $I_{n+1} = \frac{1}{2n+2} - I_n$

- Pour $n = 1$: $2(-1)^0 I_0 = 1 - \ln(2) = \sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2$
- Soit $n \geq 1$ tel que $2(-1)^{n-1} I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2$

alors

$$2(-1)^{n+1-1} I_{n+1} = -2(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2n+2} - I_n\right) = \frac{(-1)^{n+1-1}1}{n+1} + 2(-1)^{n-1} I_n$$
$$= \frac{(-1)^{n+1-1}1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2$$
$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2$$

Donc la propriété est vraie pour tout entier n.

b) Comme $I_n \to 0$ alors $2(-1)^{n-1} I_n \to 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$

2. a) On a $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}\, dx$

Soit $u(x) = \frac{1}{1+x^2}$: $u'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$: $v'(x) = x^{2n+1}$: $v(x) = \frac{1}{2n+2} x^{2n+2}$ avec u et v de classe C^1

En intégrant par parties :

$$I_n = \left[\frac{1}{1+x^2}\frac{1}{2n+2}x^{2n+2}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{2x}{2n+2}\frac{x^{2n+2}}{(1+x^2)^2} dx$$
$$= \frac{1}{4(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}\, dx$$

b) Pour encadrer l'intégrale, on encadre son contenu :

On a $x^2 \geq 0$ donc $(1+x^2)^2 \geq 1$ et $0 \leq \dfrac{1}{(1+x^2)^2} \leq 1$.

Pour $0 \leq x$ on a $x^{2n+3} \geq 0$ donc $0 \leq \dfrac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} \leq x^{2n+3}$

Comme les bornes $0 \leq 1$ on a $\quad 0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}\,dx \leq \int_0^1 x^{2n+3}dx = \left[\frac{x^{2n+4}}{2n+4}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+4}$

c) Finalement par encadrement $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}\,dx \to 0$

$$\begin{aligned} nI_n &= \frac{n}{4(n+1)} + \frac{n}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{1+1/n}\left(\frac{1}{4} + \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}\,dx\right) \\ &\to \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = 1/4$

3. on a donc $I_n \sim \dfrac{1}{4n}$ et

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2 &= 2(-1)^{n-1} I_n \\ &\sim \frac{(-1)^{n-1}}{2n} \end{aligned}$$

quand n tend vers $+\infty$.

(ESC 1999)