Corrigé (EML 2000) par Pierre Veuillez

1. a) f est continue en x tel que $1+x>0$ et $x\neq 0$ comme quotient de fonction continue.
   En 0 : pour $x\neq 0$ on a $f(x)=\ln(1+x)/x \to 1 = f(0)$ car $\ln(1+x)\sim x$ donc f est conitune également en 0.
   Elle est donc continue sur $]-1;+\infty[$.

   b) f est de classe C^1 sur $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonction de classe C^1 et

$$f'(x)=\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$$

   c) On utilise le développement limité du ln avec $\varepsilon(x)\to 0$ quand $x\to 0$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}=\frac{x-(1+x)\left(x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)\right)}{x^2(1+x)}\\
&= \frac{x-x+\frac{x^2}{2}-x^2+x^2\varepsilon_1(x)}{x^2(1+x)}=\frac{-x^2/2+x^2\varepsilon_1(x)}{x^2(1+x)}\\
&= \frac{-\frac{1}{2}+\varepsilon_1(x)}{1+x}\to-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

   d) Donc comme $f(x)\to f(0)$ et $f'(x)\to -1/2$ quand $x\to 0$ alors f est dérivable en 0 et $f'(0)=-1/2$. Et de plus f' est continue en 0. Donc f est de classe C^1 en 0 également.
   Donc f est de classe C^1 sur $]-1;+\infty[$.

2. On étudie les variations de $g(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(1+x)$:

   g est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{x+1-x}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}\\
&= -\frac{x}{(x+1)^2}
\end{aligned}$$

   Donc g' est du signe opposé de x; Comme $g(0)=0$ on a :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$		$-$	
	$\|\|$	$-$	0	$-$	
$g(x)$	$\|\|$	$\nearrow$		$\searrow$	

   et $\forall x\in\,]-1;+\infty[\,,\ \dfrac{x}{x+1}-\ln(1+x)\leqslant 0$ (<0 en dehors de 0)

   Donc $f'(x)<0$ sur $]-1;+\infty[$ et f est strictement décroissante sur $]-1;+\infty[$.

   En $+\infty$ on a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{\ln(x(1+1/x))}{x}=\frac{\ln(x)+\ln(1+1/x)}{x} \text{ car } x>0\\
&= \frac{\ln(x)}{x}+\frac{\ln(1+1/x)}{x}\to 0 \text{ car } \ln(x)\ll x
\end{aligned}$$

   En -1 on a : $f(x)\to+\infty$

3. Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$, on a x et $2x \in]-1;+\infty[$ donc f est continue sur l'intervalle d'int"gration et $\int_x^{2x} f(t)\,dt$ existe.

4. On considère la fonction $F : \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$, par : $F(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$.

   a) Soit Φ une primitive de f sur $]-1;+\infty[$ (existste car f y est continue) Φ est donc dérivable sur $]-1;+\infty[$.
   On a alors $F(x) = \Phi(2x) - \Phi(x)$
   F est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ comme somme de fonction dérivables (car $2x > -1$)
   et

$$\begin{aligned} F'(x) &= \Phi'(2x)\cdot 2 - \Phi'(x) = 2f(2x) - f(x) \\ &= 2\frac{\ln(1+2x)}{2x} - \frac{\ln(1+x)}{x} \text{ pour } x \neq 0 \\ &= \frac{\ln(1+2x) - \ln(1+x)}{x} \end{aligned}$$

   - Pour $x > 0$ on a $1+2x > 1+x$ donc comme ln est strictement sur $]0,+\infty[$ et que $1+2x$ et $1+x$ en sont éléments alors $\ln(1+2x) > \ln(1+x)$ et $F'(x) > 0$
   - Pour $-1/2 < x < 0$ on a $1+2x < 1+x$ donc $\ln(1+2x) < \ln(1+x)$ et $F'(x) > 0$ (car $x < 0$)
   - pour $x = 0$ on a $F'(0) = 2f(0) - f(0) = 0$

   Donc F est strictement croisante sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

   b) Soit $x \in]0;+\infty[$
   On doit ici minorer une intégrale; On travaille d'abord sur son contenu
   Pour $x > 0$ on a $2x > x$ et comme f est décroissante pour tout $x \leq t \leq 2x$ on a $f(x) \geq f(t) \geq f(2x)$ (constante par rapport à t)
   Et comme les bornes de l'intégrales sont ici croissantes :

$$\begin{aligned} \int_x^{2x} f(t)\,dt &\geq \int_x^{2x} f(2x)\,dt = f(2x)\,[t]_{t=x}^{2x} \\ \text{et } F(x) &\geq xf(2x) \end{aligned}$$

   c) Quand $x \to +\infty$

$$xf(2x) = x\frac{\ln(1+2x)}{2x} = \frac{\ln(1+2x)}{2} \to +\infty$$

   donc par minoration $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

(EML 2000)