Corrigé ECRICOME 2002 par Pierre Veuillez

On considère la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x).$$

0.1 Étude des fonctions f_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note h_n la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

1. h_n est dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme composée et quotient de fonctions dérivables et

$$h_n'(x) = \frac{n}{1+x} + \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{n+1+nx}{(1+x)^2}$$

   Et comme $x > -1$ on a $nx > -n$ et $h_n'(x) > 0$.

   Donc h_n est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$

2. On a : $h_n(0) = 0$, et comme h_n est strictement croissante, sur $]-1,0[$ on a :

   $\boxed{h_n < 0 \text{ sur }]-1,0[\text{ et sur }]0,+\infty[\text{ on a } h_n > 0}$

3. Étude du cas particulier $n = 1$.

   a) $f_1(x) = x\ln(1+x)$.
   La composée de $x \to 1+x$ dérivable sur $]-1,+\infty[$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ où ln est dérivable.
   Et $x \to x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f_n est dérivable sur $]-1,+\infty[$

$$f_1'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} = h_1(x)$$

   b) Donc f_1 est strictement décroissante sur $]-1,0[$ et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

   a) Comme $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \to x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (la formule pour dériver serait différente pour la puissance 0) donc (produit et somme) f_n est dérivable sur $]-1,+\infty[$

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= nx^{n-1}\ln(1+x) + \frac{x^n}{1+x} = x^{n-1}\left(n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}\right) \\ &= x^{n-1}h_n(x) \end{aligned}$$

   b) Donc si n est pair, $n-1$ est impair donc

n pair:

x	-1		0		
$h_n(x)$		$-$	0	$+$	
x^{n-1}		$-$	0	$+$	
f_n'		$+$	0	$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

n impair :

x	-1		0		
$h_n(x)$		$-$	0	$+$	
x^{n-1}		$+$	0	$+$	
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   En -1, $x^n \to +1$ si n est pair et $x^n\ln(1+x) \to -\infty$ et $x^n\ln(1+x) \to +\infty$ si n impair
   En $+\infty$: $x^n\ln(1+x) \to +\infty$

0.2 Étude d'une suite.

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$U_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

0.2.1 Calcul de U_1.

1. Pour comparer, on met les deux expressions sous la même forme (même dénominateur) en réordonnant par rapport aux puisances de x :

$$ax + b + \frac{c}{x+1} = \frac{ax^2 + (b+a)\,x + b + c}{x+1}$$

   On a donc l'égalité **si** $a = 1$ et $b + a = 0$ et $b + c = 0$ soit $a = 1$, $b = -1$ et $c = 1$

   Une autre rédaction est de chercher ces coefficients au brouillon et de constater que :

$$x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$$

   et donc que $a = 1$, $b = -1$ et $c = 1$ conviennent

2. On peut alors déterminer une primitive (la fonction intégrée est continue sur l'intervalle d'intégration) et $x + 1 > 0$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_{x=0}^1$$
$$= \ln(2) - \frac{1}{2}.$$

3. On a

$$U_1 = \int_0^1 f_1(x)\,dx = \int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$$

   et en intégrant par partie (on dérive le ln pour le faire disparaître)

   $u(x) = \ln(1+x)$, u de classe C^1 sur $[0,1]$, $u'(x) = \dfrac{1}{1+x}$

   $v'(x) = x$, v' est continue $v(x) = x^2/2$

$$U_1 = \left[\frac{x^2}{2}\ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(1+x)}dx = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$$
$$= \frac{1}{4}$$

0.2.2 Convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. Pour monter que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone, il suffit de comparer U_n et U_{n+1}.

   Comme ce sont des intégrales, on compare leurs contenus sur $[0,1]$:

   $x^{n+1} - x^n = x^n(x-1) \leq 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et comme $\ln(1+x) \geq 0$ sur $[0,1]$ (car $1+x \geq 1$) donc $x^{n+1}\ln(1+x) \leq x^n\ln(1+x)$ et comme $0 \leq 1$ (ordre des bornes) on a alors

$$\int_0^1 x^{n+1}\ln(1+x)\,dx \leq \int_0^1 x^n\ln(1+x)\,dx$$

   et $U_{n+1} \leq U_n$.

   Conclusion : $\boxed{\text{la suite } U \text{ est décroissante}}$

2. Toutes ces intégrales sont positive ou nulles car le contenu est positif et les bornes sont en ordre croissant

   Donc U est décroissante et minorée par 0donc convergente.

3. Pour encadrer l'intégrale, on encadre là encore le contenu. Pour obtenir $\frac{1}{n+1}$ on conserve le x^n dans cet encadrement. On se contente donc d'encadre le ln :

   Si $0 \leq x \leq 1$ alors $1 \leq 1+x \leq 2$ et comme ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et que 1, $1+x$ et 2 en sont éléments, $\ln(1) \leq \ln(1+x) \leq \ln(2)$.

   Comme $x^n \geq 0$ alors $0 \leq x^n \ln(1+x) \leq x^n \ln(2)$

   Enfin comme $0 \leq 1$:

$$0 \leq \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx \leq \int_0^1 x^n \ln(2)\,dx = \ln(2)\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{n+1}$$

   Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leqslant U_n \leqslant \dfrac{\ln 2}{n+1}}$

4. Et comme $\dfrac{\ln 2}{n+1} \to 0$, $\boxed{\text{par encadrement } U_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0}$

0.2.3 Calcul de U_n pour $n \geqslant 2$.

Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose :

$$S_n(x) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k.$$

1. Comme $-x \neq 1$ on a :

$$\begin{aligned} S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k &= \frac{(-x)^{n+1}-1}{-x-1}. \\ &= \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} \\ &= \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x} \end{aligned}$$

2. On a donc en intégrant l'égalité précédente sur $[0,1]$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k dx &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 x^k dx = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_{x=0}^1 \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \end{aligned}$$

   d'une part et d'autre part

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}\right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \\ &= [\ln(1+x)]_0^1 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \\ &= \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx \end{aligned}$$

et finalement

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\, dx.$$

3. On reconnaît dans la formule proposée $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$. On fait donc apparaître dans l'expression de U_n la quantité $\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\, dx$:

   On a

$$U_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\, dx$$

   avec $u(x) = \ln(1+x)$, u est de classe C^1 sur $[0,1]$ et $u'(x) = \frac{1}{1+x}$

   et avec $v'(x) = x^n$ continue on a $v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ donc en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} U_n &= \left[\frac{x^{n+1}\ln(1+x)}{n+1}\right]_{x=0}^{1} - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)} dx \\ &= \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \end{aligned}$$

   et de

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\, dx$$

   on tire

$$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\, dx = (-1)^n \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} - \ln 2\right]$$

   d'où finalement

$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}\left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k+1} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right].$$