Corrigé ESCP 2001 par Pierre Veuillez

1. On considère la fonction G de deux variables réelles définie, pour tout x et y strictement positifs, par:
$$G(x,y) = \frac{x^2}{2y^2} - \ln x + y - \frac{3}{2}$$
   a) G est de classe C^2 en (x,y) tels que $y \neq 0$ et $x > 0$ donc sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$
$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) &= \frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} = \frac{x^2-y^2}{y^2 x} \\
\frac{\partial G}{\partial y}(x,y) &= -\frac{x^2}{y^3} + 1 = \frac{-x^2+y^3}{y^3} \\
\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} \\
\frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x}(x,y) &= -\frac{2x}{y^3} \\
\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{3x^2}{y^4}
\end{aligned}$$
   b) Si G a un extremum local sur l'ouvert $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ alors
   $\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ y^3 - x^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \text{ car } x > 0 \text{ et } y > 0 \\ y^3 - y^2 = 0 \end{cases}$
   et comme $y^3 - y^2 = 0 = y^2(y-1)$ et que $y \neq 0$ alors
   Conclusion : $\boxed{\text{le seul point critique de } G \text{ est } (1,1)}$
   (c'est le seul point où G est susceptible d'avoir un extremum)
   On test si ce point est un extrema local :
   $r = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(1,1) = 2 : s = \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x}(1,1) = -2 : t = \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(1,1) = 3$
   et $rt - s^2 = 6 - 4 > 0$
   Donc, sur l'ouvert $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ G a un extremum local en $(1,1)$ et comme $r > 0$, c'est un minimum local.
   Conclusion : $\boxed{\text{le seul extremum local de } G \text{ est un minimum local en } (1,1)}$

2. On considère maintenant la fonction f définie, pour tout x strictement positif, par:
$$f(x) = G(x,1) = \frac{x^2}{2} - \ln x - \frac{1}{2}$$
   a) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x}$ qui est donc du signe du polynôme $x^2 - 1$
   f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f''(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$ donc f est convexe sur $]0,+\infty[$
   En 0^+ : $f(x) \to +\infty$
   En $+\infty$: $f(x) = x^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{\ln(x)}{x^2} - \frac{1}{2x^2}\right] \to +\infty$
   et $f(x)/x = \frac{x}{2} - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{2x} \to +\infty$ donc la courbe représentative de f a une branche parabolique verticale.

x	0		1		$+\infty$
x^2-1		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

i. Une primitive de f sur l'intervalle $]0,+\infty[$ est F définie par $F(x)=\frac{x^3}{6}-x\ln(x)+\frac{1}{2}x$ en effet, F y est dérivable et $F'(x)=f(x)$

ii. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est impropre en 0 (f n'y est pas prolongeable par continuité) et pour $\varepsilon>0$

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 f(x)\,dx &= \left[\frac{x^3}{6}-x\ln(x)+\frac{1}{2}x\right]_\varepsilon^1\\ &= \frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\left(\frac{\varepsilon^3}{6}-\varepsilon\ln(\varepsilon)+\frac{1}{2}\varepsilon\right)\\ &\to \frac{2}{3}\text{ quand } \varepsilon\to 0\end{aligned}$$

Donc $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\frac{2}{3}$

b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On pose $S_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} f(\frac{j}{n})$.

i. Pour encadrer l'intégrale, on encadre le contenu en utilisant le sens de variation de f :
Pour tout entier j vérifiant $1\leq j<n$, on a $j+1\leq n$ et donc $0<\frac{j}{n}\leq\frac{j+1}{n}\leq 1$.
Donc f est décroissante sur $\left[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}\right]$ et pour tout t tel que $\frac{j}{n}\leq t\leq\frac{j+1}{n}$ on a $f\left(\frac{j}{n}\right)\geq f(t)\geq f\left(\frac{j+1}{n}\right)$.
Et comme $\frac{j}{n}\leq\frac{j+1}{n}$ (ordre des bornes)

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{j+1}{n}\right)=\int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f\left(\frac{j+1}{n}\right)dt\leq\int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x\leq\int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f\left(\frac{j}{n}\right)dt=\frac{1}{n}f\left(\frac{j}{n}\right)$$

ii. On somme alors les inégalités précédentes de ... 1 à $n-1$ (valeurs de$j$ pour lesquelles l'inégalité est vraie) et on rectifie afin d'avoir S_n :
Pour le membre de gauche :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{j+1}{n}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} f\left(\frac{j+1}{n}\right)\text{ avec } k=j+1\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\\ &= S_n-\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Pour le membre de droite :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{j}{n}\right) &= \frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)-f(1)\right]\\ &= S_n-0\end{aligned}$$

Et pour le centre :

$$\sum_{j=1}^{n-1}\int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x\text{ (Chasles)}$$

On a donc

$$S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \ \leq S_n$$

ou encore :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

iii. Pour tout $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{n}\right]$, f est décroissante sur $[\varepsilon, 1]$ donc $f\left(\frac{1}{n}\right) \leq f(x)$ donc

$$\left(\frac{1}{n} - \varepsilon\right) f\left(\frac{1}{n}\right) = \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{n}} f\left(\frac{1}{n}\right) \mathrm{d}x \leq \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

et par passage à la limite dans l'inégalité quand $\varepsilon \to 0$

$$0 \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \int_{0}^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

c) On considère la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ définie précédemment.
Comme $\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \to \int_0^0 f(x)\,dx = 0$ quand $n \to +\infty$ alors $\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$ par encadrement.
D'autre part, $\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \to \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ quand $n \to +\infty$ (car cette intégrale impropre en 0 est convergente)
Alors par l'encadrement

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

on déduit que $S_n \to \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$
Conclusion : $\boxed{S_n \to \frac{2}{3} \text{ quand } n \to +\infty}$

d) On rappelle que, pour tout entier naturel non nul, on a l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

i. On calcule :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) &= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{(j/n)^2}{2} - \ln(j/n) - \frac{1}{2}\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{(j/n)^2}{2} - \sum_{j=1}^{n} \ln(j/n) - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2n^2} \sum_{j=1}^{n} j^2 - \ln\left(\prod_{j=1}^{n} \frac{j}{n}\right) - \frac{n}{2} \\
&= \frac{1}{2n^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) - \frac{n}{2} \\
&= \frac{1}{2n^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) - \frac{n}{2} \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{12n} - \frac{n}{2} + \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right) \\
&= \frac{-4n^2+3n+1}{12n} + \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)
\end{aligned}$$

ii. En divisant par n on obtient donc

$$S_n = \frac{-4n^2+3n+1}{12n^2} + \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$$

Comme

$$\frac{-4n^2+3n+1}{12n^2} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{12n^2} \to -\frac{1}{3}$$

et que $S_n \to \frac{2}{3}$ alors $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right) = S_n - \frac{-4n^2+3n+1}{12n^2} \to \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)}$

N.B. Cela ressemble au théorème sur les sommes de Riemann :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{n}{i}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}-\ln\left(\frac{i}{n}\right) \to \int_0^1 -\ln(t)\,dt \end{aligned}$$

intégrale impropre qui vaut 1 **si** ln est continue sur $[0,1]$... ce qui n'est pas le cas.