1. La fonction $t \longrightarrow \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^5}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc $\int\limits_1^\infty \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^5} dt$ ne pose de problème de convergence qu'en $+\infty$. Or pour t et x positifs, $\frac{t^k e^{-xt}}{1+t^5} \geq 0$.

   Et comme, pour x strictement positifs, t^k est négligeable devant $\left(e^{x/2}\right)^t$ quand t tend vers $+\infty$, $\frac{t^k e^{-xt}}{1+t^5} = \frac{t^k e^{-xt/2}}{1+t^5} e^{-xt/2}$ est négligeable devant $e^{-tx/2}$.

   Or l'intégrale $\int_1^M e^{-tx/2} = \left[-\frac{2}{x} e^{-tx/2}\right]_{t=1}^M = -\frac{2}{x} e^{-mx/2} + \frac{2}{x} e^{-x/2} \underset{m\to+\infty}{\to} \frac{2}{x} e^{-x/2}$ converge. Donc par comparaison d'intégrales de fonctions positives, $\int\limits_1^\infty \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^5} dt$ converge.

   N.B. le théorème de comparaison par négligeable n'est pas au programme. Il aurait donc fallut passer par: $\frac{t^k e^{-xt/2}}{1+t^5} \to 0$ donc pour t suffisamment grand, $\frac{t^k e^{-xt/2}}{1+t^5} \leq 1$ donc $\frac{t^k e^{-xt/2}}{1+t^5} e^{-xt/2} \leq e^{-xt/2}$ et procéder ensuite par comparaison.

   Pour $x = 0$, $\frac{t^k e^{-0t}}{1+t^5} = \frac{t^k}{1+t^5} = \frac{t^{k-5}}{(1+1/t^5)} \underset{t\longrightarrow+\infty}{\sim} t^{k-5}$.

   Donc par comparaison d'intégrales de fonctions positives, pour $k \geq 4$, l'intégrale diverge et pour $k < 4$, elle converge.

2. On ne sait pas dériver sous l'intégrale (seulement en intégrant par parties). C'est d'ailleurs l'objet de cet exercice. On revient donc à la définition du sens de variation d'une fonction: si $x \leq y$ alors $f(x) \geq f(y)$:

   Soient $x \leq y$ deux réels supérieurs à 0.

   On a pour tout $t \geq 1$, $tx \leq ty$, $-tx \geq -ty$ et comme la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$, $e^{-tx} \geq e^{-ty}$.

   Donc $\frac{e^{-xt}}{1+t^5} \geq \frac{e^{-yt}}{1+t^5} > 0$. Et $\int\limits_1^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^5} dt \geq \int\limits_1^\infty \frac{e^{-yt}}{1+t^5} dt > 0$ car les bornes sont en ordre croissant. Donc si $0 \leq x \leq y$ alors $F(x) \geq F(y) > 0$.

   a) **Conclusion:** F est une fonction strictement positive, décroissante

   Pour la limite, comme on ne sait pas calculer l'intégrale, on majore d'abord la fonction (en conservant une fonction dont l'intégrale converge):

   Pour $t \geq 1$, on a $1 + t^5 \geq 1$ et comme la fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$ et que 1 et $1 + t^5$ en sont éléments, $\frac{1}{1+t^5} \leq 1$. Enfin $e^{-xt} \geq 0$ donc

   $$\frac{e^{-xt}}{1+t^5} \leq e^{-xt}$$

   Or $\int_1^M e^{-tx} dt = \left[-\frac{1}{x} e^{-tx}\right]_{t=1}^M = -\frac{1}{x} e^{-Mx} + \frac{1}{x} e^{-x} \underset{M\to+\infty}{\to} \frac{1}{x} e^{-x} = \int\limits_1^\infty e^{-tx} dt$ donc comme les bornes sont en ordre croissant,

   $$\int\limits_1^\infty \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^5} dt \leq \int\limits_1^\infty e^{-xt} dt = \frac{1}{x} e^{-x}$$

   On a donc: $0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x} e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ et par encadrement (et non par majoration)

   $$\lim_{x\longrightarrow+\infty} F(x) = 0$$

3. a) On ne sait pas résoudre une telle inégalité, on passe donc par le sens de variation de la différence. $(|x| < y \Leftrightarrow -y < x < y)$. Par apport à h car c'est lui qui apparaît le moins dans les exponentielles.

On a $e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\ h\ e^{-tx} - \frac{t^2h^2}{2}e^{-tx} = e^{-tx}\left(e^{-th} - 1 + th - \frac{t^2h^2}{2}\right)$.

Soit la fonction G définie par: $G(z) = e^{-z} - 1 + z - \frac{z^2}{2}$

G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G'(z) = -e^{-z} + 1 - z$.

G' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G''(z) = e^{-z} - 1 \leq 0$. pour $z \geq 0$ car $e^{-z} \leq e^0$

Donc G' est décroissante sur $[0, +\infty[$. Or $G'(0) = 0$ donc $G' \leq 0$ sur $[0, +\infty[$.

Donc G est décroissante sur $]0, +\infty[$. Et comme $G(0) = 0$, $G \leq 0$ sur $[0, +\infty[$.

Pour $t \geq 0$ et $h \geq 0$ on a $z = th \geq 0$ donc $e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\ h\ e^{-tx} - \frac{t^2h^2}{2}e^{-tx} \leq 0$

Donc $e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\ h\ e^{-tx} \leq \frac{t^2h^2}{2}e^{-tx}$. pour tout $h \geq 0$, $t \geq 0$ et x réel.

De même, avec $H(z) = e^{-z} - 1 + z$, on trouve $H'(z) = -e^{-z} + 1 \geq 0$ pour $z \geq 0$

Donc H est croissante sur $[0, +\infty[$ et comme $H(0) = 0$, H est positive.

Donc pour $t \geq 0$ et $h \geq 0$, $e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\ h\ e^{-tx} \geq 0$

Finalement, pour tout réel $t \geq 0$, tout réel x et tout réel $h \geq 0$, on a:

$$\left|e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\ h\ e^{-tx}\right| \leq \frac{t^2h^2}{2}e^{-tx}$$

b) $e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\ h\ e^{-tx} - \frac{t^2h^2}{2}e^{-t(x+h)} = e^{-t(x+h)}(1 - e^{th} + t\ h\ e^{th} - \frac{t^2h^2}{2})$

Soit $G(z) = 1 - e^z + ze^z - \frac{z^2}{2}$.

G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G'(z) = ze^z - z = z(e^z - 1)$.

Or pour $z \leq 0, e^z \leq e^0 = 1$ donc $G' \geq 0$ sur $]-\infty, 0]$ et G y est croissante.

Comme $G(0) = 0$, on a alors $G \leq 0$ sur $]-\infty, 0]$.

Donc pour $t \geq 0$ et $h \leq 0$ avec $z = t.h \leq 0$ on a

$$e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\ h\ e^{-tx} - \frac{t^2h^2}{2}e^{-t(x+h)} \leq 0$$

et

$$e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\ h\ e^{-tx} \leq \frac{t^2h^2}{2}e^{-t(x+h)}$$

Soit $H(z) = 1 - e^z + ze^z$.

H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $H'(z) = ze^z \leq 0$ sur $]-\infty, 0]$.

Donc H est décroissante sur $]-\infty, 0]$. Comme $H(0) = 0$, on a $H \geq 0$ sur $]-\infty, 0]$.

Donc pour $t \geq 0$ et $h \leq 0$ avec $z = t.h \leq 0$ on a

$$0 \leq e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\ h\ e^{-tx}$$

et finalement

$$\left|e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\ h\ e^{-tx}\right| \leq \frac{t^2h^2}{2}e^{-t(x+h)}$$

c) Or pour $t \geq 0$, $x \geq 0$ et $x + h \geq 0$, on a $-tx \leq 0$ donc $e^{-tx} \leq 1$ et $-t(x+h) \leq 0$ donc $e^{-t(x+h)} \leq 1$. Si bien que, pour h positif ou négatif on a $\left|e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\ h\ e^{-tx}\right| \leq \frac{t^2h^2}{2}$.

On remarque d'abord que toutes les intégrales ci dessous convergent:

En effet $\frac{t^2}{1+t^5} = \frac{1}{t^3(1+1/t^5)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3} \geq 0$ donc $\int_1^\infty \frac{t^2h^2}{2(1+t^5)}dt$ converge.

L'intégrale $\int\limits_1^{\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^5} dt$ a été traitée au 1).

Enfin pour $x \geq 0$ et $x+h \geq 0$, $F(x)$ et $F(x+h)$ sont définie.

$$\begin{aligned}
\left| F(x+h) - F(x) + h \int_1^{\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^5} dt \right| &= \left| \int_1^{\infty} \frac{e^{-t(x+h)}}{1+t^5} dt - \int_1^{\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^5} dt + \int_1^{\infty} \frac{t\ h\ e^{-tx}}{1+t^5} dt \right| \\
&= \left| \int_1^{\infty} \frac{e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\ h\ e^{-tx}}{1+t^5} dt \right| \text{ bornes croissantes} \\
&\leq \int_1^{\infty} \left| \frac{e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\ h\ e^{-tx}}{1+t^5} \right| dt \leq \int_1^{\infty} \frac{t^2 h^2}{2(1+t^5)} dt
\end{aligned}$$

D'où finalement,

$$\left| F(x+h) - F(x) + h \int_1^{\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^5} dt \right| \leq \frac{h^2}{2} \int_1^{\infty} \frac{t^2}{1+t^5} dt$$

d) En factorisant puis divisant par $|h| > 0$ l'inégalité précédente, on retrouve le taux d'accroissement:

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} + \int_1^{\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^5} dt \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_1^{\infty} \frac{t^2}{1+t^5} dt \underset{h \to 0}{\to} 0$$

Donc par encadrement $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} + \int\limits_1^{\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^5} dt$ tend vers 0 et $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \underset{h \to 0}{\to} \int\limits_1^{\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^5} dt$.

Conclusion: F est dérivable en x et $F'(x) = \int\limits_1^{\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^5} dt$

La dérivation a pu se faire à l'intérieur de l'intégrale.

Remarque: Le fait que x soit positif ne servait pas dans les inégalités mais seulement pour la convergence des intégrales. En 0 on n'obtient que la dérivée à droite: comme $x+h \geq 0$, on n'a pas les inégalités pour $h < 0$.

4. On a vu que pour $t \geq 0$, $x \geq 0$ et $x+h \geq 0$, on avait $\left| e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\ h\ e^{-tx} \right| \leq \frac{t^2 h^2}{2}$.

   Donc $\left| te^{-t(x+h)} - te^{-tx} + t^2 h e^{-tx} \right| \leq \frac{t^3 h^2}{2}$.

   En procédant comme précédemment, on obtient $\left| \frac{F'(x+h)-F'(x)}{h} + \int\limits_1^{\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^5} dt \right| \leq \frac{h^2}{2} \int\limits_1^{\infty} \frac{t^3}{1+t^5} dt \underset{h \to 0}{\to} 0$

   Il faut noter que cette intégrale converge encore car $\frac{t^3}{1+t^5} \sim \frac{1}{t^2}$. On ne pourra donc pas procéder ainsi une fois de plus.

   Donc par encadrement $\frac{F'(x+h)-F'(x)}{h} \underset{h \to 0}{\to} \int\limits_1^{\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^5} dt$.

   Finalement F' est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $F"(x) = \int\limits_1^{\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^5} dt$

5. On se propose de montrer que la fonction $\ln(F)$ est convexe.

   a) $a\lambda^2 + 2b\lambda + c$ est un polynôme de degré 2 en λ. Donc s'il est positif ou nul pour tout λ c'est que son discriminant est négatif ou nul. i.e. si $(2b)^2 - 4ac \leq 0$; Alors $ac - b^2 \geq 0$.

b) Comme $F > 0$, la fonction $f = \ln(F)$ est deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$ et

$$f' = \frac{F'}{F}, \text{ et } f" = \frac{F" F - (F')^2}{F^2}$$

Avec $a = F"$, $c = F$ et $b = F'$ on reconnaît $ac - b^2$.
On considère donc

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \lambda^2 F"(x) + 2\lambda F'(x) + F(x) &= \int_1^\infty \frac{(\lambda^2 t^2 + 2\lambda t + 1)\, e^{-xt}}{1 + t^5} dt \\ &= \int_1^\infty \frac{(\lambda t + 1)^2\, e^{-xt}}{1 + t^5} dt \geq 0 \end{aligned}$$

car $\frac{(\lambda t+1)^2 e^{-xt}}{1+t^5} \geq 0$ et que les bornes sont en ordre croissant.
Donc $F" F - (F')^2 = ac - b^2 \geq 0$ et pour tout $x \geq 0$, $f" \geq 0$. Donc $f = \ln(F)$ est convexe.