1. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 7 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

2. $2A + 3I = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A^2$ donc $\alpha = 2$ et $\beta = 3$ conviennent.

3. Pour $n = 0$ on a $A^0 = I = 0 \cdot A + 1 \cdot I$ donc $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + \beta_n$ et $\beta_{n+1} = 3\alpha_n$ conviennent.

Donc par récurrence que c $\alpha_0 = 0$ et $\beta_0 = 1$ conviennent.

Soit $n \geq 0$ et α_n et β_n des réels tels que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$, alors

$A^{n+1} = A^n A = (\alpha_n A + \beta_n I) A = \alpha_n A^2 + \beta_n A = \alpha_n (2A + 3I) + \beta_n A = (2\alpha_n + \beta_n) A + 3\alpha_n I$

Donc $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + \beta_n$ et $\beta_{n+1} = 3\alpha_n$ conviennent.

Donc par récurrence que pour tout entier n il existe des réels α_n et β_n tels que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$ avec $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + \beta_n$ et $\beta_{n+1} = 3\alpha_n$

4. **a)** Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{n+2} = 2\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} = 2\alpha_{n+1} + 3\alpha_n$

Donc $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

Son équation caractéristique est : $r^2 - 2r - 3 = 0$ qui a pour racines -1 et 3

Donc pour tout entier n, $\alpha_n = x(-1)^n + y3^n$ avec x et y qui vérifient :

$\begin{cases} \alpha_0 = x(-1)^0 + y3^0 \\ \alpha_1 = x(-1)^1 + y3^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = x + y \\ 1 = -x + 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 4y \\ x = 3y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1/4 \\ x = -1/4 \end{cases}$

Donc pour tout entier n, $\alpha_n = (3^n - (-1)^n)/4$

b) $\beta_n = 3\alpha_{n-1} = 3\left(-(-1)^{n-1} + 3^{n-1}\right)/4 = (3(-1)^n + 3^n)/4$ pour $n \geq 1$ et pour $n = 0$ également.

5. **a)** Comme $A^2 = 2A + 3I$, alors $I = (A^2 - 2A)/3 = A(A - 2I)/3 = \frac{1}{3}(A - 2I)A$ donc A est inversible et son inverse est $A^{-1} = \frac{1}{3}(A - 2I)$

b) On aurait $\alpha_{-1} = \left(3^{-1} - (-1)^{-1}\right)/4 = (1/3 + 1)/4 = 1/3$

et $\beta_{-1} = \left(3(-1)^{-1} + 3^{-1}\right)/4 = (-3 + 1/3)/4 = -2/3$ ce qui correspond aux coeffcients trouvés.

Donc les expressions sont encore valables pour $n = -1$.

c) On montre que pour tout entier n, $A^{-n} = a_n A + b_n I$ (a_n et b_n réels)

Pour $n = 0$, $A^{-0} = I = 0A + 1I$ donc $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ conviennent.

Soit n tel que $A^{-n} = a_n A + b_n I$ alors

$$\begin{aligned} A^{-n-1} &= A^{-1}A^{-n} = A^{-1}(a_n A + b_n I) = a_n I + b_n A^{-1} \\ &= a_n I + \frac{1}{3} b_n (A - 2I) = \left(a_n - \frac{2}{3} b_n\right) I + \frac{1}{3} b_n A \end{aligned}$$

Donc avec $a_{n+1} = \frac{1}{3} b_n$ et $b_{n+1} = a_n - \frac{2}{3} b_n$ (réels) on a bien $A^{-n-1} = a_{n+1} A + b_{n+1} I$

Et pour tout entier n, $A^{-n} = a_n A + b_n I$ (a_n et b_n réels)
Or

$$b_{n+2} = a_{n+1} - \frac{2}{3} b_{n+1} = \frac{1}{3} b_n - \frac{2}{3} b_{n+1}$$

donc b est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
Son équation caractéristique est $3r^2 + 2r - 1 = 0$ de racines -1 et 1/3
Donc pour tout entier n, $b_n = x\,(-1)^n + y/3^n$ avec x et y qui vérifient :
$b_1 = a_0 - \frac{2}{3} b_0 = -2/3$

$$\left\{\begin{array}{l} b_0 = x\,(-1)^0 + y/3^0 \\ b_1 = x\,(-1)^1 + y/3^1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 1 = x + y \\ -2/3 = -x + y/3 \quad L2 + L1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 1 - y \\ \frac{1}{3} = \frac{4}{3} y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 3/4 \\ y = 1/4 \end{array}\right.$$

Donc pour tout entier n, $b_n = \left(1/3^n + 3\,(-1)^n\right)/4$ (ce qui est β_{-n})
et

$$a_n = \frac{1}{3} b_{n-1} = \frac{1}{3}\left(1/3^{n-1} + 3\,(-1)^{n-1}\right)/4 = \left(3^{-n} - (-1)^n\right)/4 = \alpha_{-n}$$

Et on trouve les mêmes résultats que précédemment.

(ECRICOME 94)