EDHEC 2004

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à 2.
On note e_0, e_1, e_2 les fonctions définies, pour tout réel x par $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$ et on rappelle que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de E.
Soit f l'application qui à toute fonction polynomiale P de E associe la fonction $Q = f(P)$, où Q est la dérivée seconde de l'application qui à tout réel x associe $(x^2 - x)P(x)$.

1. a) Montrer que f est un endomorphisme de E.

   b) Déterminer $f(e_0)$, $f(e_1)$, et $f(e_2)$ en fonction de e_0, e_1 et e_2.

   c) En déduire que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

   d) Montrer sans calcul que f est un automorphisme de E.

2. a) Donner les valeurs propres de f , puis en déduire que f est diagonalisable.

   b) Déterminer les sous-espaces propres de f .

3. a) Justifier l'existence dune matrice P inversible dont la première ligne ne contient que des 1 telle que $A = P\,D\,P^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

   b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = P\,D^n\,P^{-1}$

4. a) Déterminer la matrice P^{-1}.

   b) En déduire explicitement, en fonction de n, la matrice A^n.

   c) On dit qu'une suite de matrices (M_n) tend vers la matrice M, lorsque n tend vers $+\infty$, si chaque coefficient de M_n tend vers le coefficient situé à la même place dans M.
   On pose $B = \frac{1}{12}A$. Montrer que la suite $(B^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une matrice J vérifiant $J^2 = J$.