On considère la matrice carrée d'ordre trois suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

1. A est une matrice symétrique, donc diagonalisable.

2. On détermine les éléments propres de A :

$$(A - \alpha I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -\alpha x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 & L_1 + 2\alpha L_2 \rightarrow L_2 \\ \frac{1}{2}x - \alpha y + \frac{1}{2}z = 0 & L_2 \rightarrow L_1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \alpha z = 0 & L_3 - L_1 \rightarrow L_3 \end{cases}$$

$$\iff (1) \begin{cases} \frac{1}{2}x - \alpha y + \frac{1}{2}z = 0 \\ (\frac{1}{2} - 2\alpha^2)y + (\frac{1}{2} + \alpha)z = 0 \\ (\frac{1}{2} + \alpha)y - (\frac{1}{2} + \alpha)z = 0 \end{cases}$$

$$- \text{ Si } \alpha \neq -\frac{1}{2} \text{ alors } \frac{1}{2} + \alpha \neq 0 \text{ et } (1) \iff (2) \begin{cases} \frac{1}{2}x + (-\alpha + \frac{1}{2})z = 0 \\ (1 + \alpha - 2\alpha^2)z = 0 \\ y = z \end{cases}$$

On détermine les racine de $1 + \alpha - 2\alpha^2$: $\Delta = 1 + 8 = 9$ et les racines sont : $\alpha_1 = \frac{-1+3}{-4} = -\frac{1}{2}$ (exclus ici) et $\alpha_2 = \frac{-1-3}{-4} = 1$

$$- \text{ Si de plus } \alpha \neq 1 \text{ alors } (2) \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = z \end{cases} \text{ et } \alpha \text{ n'est pas valeur propre.}$$

$$- \text{ Si } \alpha = 1 \text{ alors } (2) \iff \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z = 0 \\ y = z \end{cases} \iff x = y = z$$

et donc 1 est valeur propre associé au sous espace propre $E_1 = \text{Vect}((1, 1, 1))$ de base $((1, 1, 1))$ (génératrice et libre)

et donc $\dim(E_1) = 1$

- Si $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ alors $(1) \iff \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \iff z = -x - y$
et donc $-\frac{1}{2}$ est valeur propre associé au sous espace propre $E_{-\frac{1}{2}} = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1))$
écriture qui ne conviendra pas pour la matrice de passage demandé ...

$$(1) \iff x = -y - z \text{ et } E_{-\frac{1}{2}} = \text{Vect}((1, -1, 0), (1, 0, -1))$$

La famille $((1, -1, 0), (1, 0, -1))$ est libre car échelonnée

C'est donc une base de $E_{-\frac{1}{2}}$. et $\dim(E_{-\frac{1}{2}}) = 2$

La somme des dimensions des sous espaces propres étant 3, la matrice A d'ordre 3 est diagonalisable et la concaténation

$\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 0, -1))$ des bases des sous espaces propres forme une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\text{Soit } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ la matrice de passage de la base canonique dans } \mathcal{B} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

P a bien les 2 premières lignes demandées et est inversible -matrice de passage- et symétrique.

On a alors $A = P D P^{-1}$

On calcule l'inverse de P :

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y + z = a \\ x - y = b \\ x - z = c \end{cases} \iff \begin{cases} x + x - b + x - c = a \\ y = x - b \\ z = x - c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a+b+c}{3} \\ x = \frac{a-2b+c}{3} \\ z = \frac{a+b-2c}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Donc $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (que l'on prend soin de vérifier sur $P \cdot P^{-1} = I$)

Plus rapide (<http://baudrandmaths.free.fr/>) On nous demande une matrice de premières lignes $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$ et symétrique.

Donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & ? \end{pmatrix}$. Et il ne reste qu'à tester les deux premières colonnes et à trouver le dernier coefficient de la troisième :

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc 1 valeur propre et $(1, 1, 1)$ vecteur propre associé.

$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $(1, -1, 0)$ est vecteur propre associé à $\frac{-1}{2}$

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}z = \alpha \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{2} = \alpha z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} = \alpha \\ z = -1 \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$ donc $-\frac{1}{2}$ est valeur propre et $(1, 0, -1)$ est un vecteur propre associé.

Reste à justifier que l'on a une base formée de vecteurs propres :

– Par le théorème CNS, il faut la dimension de chaque sous espace propre, alors que l'on a juste **des** vecteurs de ces sous espaces (et non une base de chacun).

$((1, -1, 0), (1, 0, -1))$ est libre donc la dimension du sous espace associé à $\frac{-1}{2}$ est au moins de 2

et celle du sous espace associé à 1 est au moins de 1.

Comme la somme des dimensions des sous espaces propres est inférieure à 3, ces dimensions sont donc $\dim E_1 = 1$ et $\dim E_{-\frac{1}{2}} = 2$ et on a donc une base de chacun.

Et la juxtaposition des bases forme une base de $\mathbb{R}^3$ (CNS)

– On montre directement que la famille $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 0, -1))$ est une base en montrant qu'elle est libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

Si $\alpha(1, 1, 1) + \beta(1, -1, 0) + \gamma(1, 0, -1) = 0$ alors ... alors $\alpha = \beta = \gamma = 0$

3. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et même dans $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} A^n &= P D^n P^{-1} \\ &= \frac{1}{3} P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{-1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{-1}{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (\frac{-1}{2})^n & -2(\frac{-1}{2})^n & (\frac{-1}{2})^n \\ (\frac{-1}{2})^n & (\frac{-1}{2})^n & -2(\frac{-1}{2})^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2(\frac{-1}{2})^n & 1 - (\frac{-1}{2})^n & 1 - (\frac{-1}{2})^n \\ 1 - (\frac{-1}{2})^n & 1 + 2(\frac{-1}{2})^n & 1 - (\frac{-1}{2})^n \\ 1 - (\frac{-1}{2})^n & 1 - (\frac{-1}{2})^n & 1 + 2(\frac{-1}{2})^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(Que l'on vérifie pour $n = 0$ et $n = 1$)

4. Soient u_0, v_0, w_0 trois nombres réels positifs ou nuls tels que $u_0 + v_0 + w_0 = 1$.

On note $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne définie par la relation de récurrence : $X_n = A X_{n-1}$.

a) La suite X est géométrique matricielle de raison A donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = A^n X_0$

b) On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ (la formule de A^n étant également vraie pour $n = 0$)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + 2 \left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1 + 2 \left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1 + 2 \left(\frac{-1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) (u_0 + v_0 + w_0) + 3 \left(\frac{-1}{2}\right)^n u_0 \\ \left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) (u_0 + v_0 + w_0) + 3 \left(\frac{-1}{2}\right)^n v_0 \\ \left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) (u_0 + v_0 + w_0) + 3 \left(\frac{-1}{2}\right)^n w_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n + 3 \left(\frac{-1}{2}\right)^n u_0 \\ 1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n + 3 \left(\frac{-1}{2}\right)^n v_0 \\ 1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n + 3 \left(\frac{-1}{2}\right)^n w_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{et donc } \begin{cases} u_n = \frac{1}{3} + \left(u_0 - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ v_n = \frac{1}{3} + \left(v_0 - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ w_n = \frac{1}{3} + \left(w_0 - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{-1}{2}\right)^n \end{cases}$$

c) Comme $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$ alors $\left(\frac{-1}{2}\right)^n \rightarrow 0$ et $u_n, v_n,$ et w_n tendent vers $\frac{1}{3}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Conclusion : $\boxed{u = v = w = \frac{1}{3}}$

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $d_n = \sqrt{(u_n - u)^2 + (v_n - v)^2 + (w_n - w)^2}$

d) On a

$$\begin{aligned} d_n^2 &= \left[\left(u_0 - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right]^2 + \left[\left(v_0 - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right]^2 + \left[\left(w_0 - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right]^2 \\ &= \left(\frac{-1}{2}\right)^{2n} \left[\left(u_0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(v_0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(w_0 - \frac{1}{3}\right)^2\right] \end{aligned}$$

Et comme Soient u_0, v_0, w_0 trois nombres réels positifs ou nuls tels que $u_0 + v_0 + w_0 = 1$.

alors $0 \leq u_0 = 1 - (v_0 + w_0) \leq 1$ et $\frac{-2}{3} \leq \frac{-1}{3} \leq u_0 - \frac{1}{3} \leq \frac{2}{3}$

Donc $\left(u_0 - \frac{1}{3}\right)^2 \leq \frac{4}{9}$ et de même pour $\left(v_0 - \frac{1}{3}\right)^2$ et $\left(w_0 - \frac{1}{3}\right)^2$.

Donc $\left(u_0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(v_0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(w_0 - \frac{1}{3}\right)^2 \leq \frac{4}{3} \leq 4$

Finalement $d_n^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} 4$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : d_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}}$

e) Comme $2^7 = 128$ alors pour $n = 8$ on a $2^{n-1} = 128$ et $d_8 \leq 10^{-2}$

Conclusion : $\boxed{\text{pour } n = 8 \text{ on a bien } d_8 \leq 10^{-2}}$