EML 2007

On considère la matrice carrée d'ordre trois suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer, sans calcul, que A est diagonalisable.
2. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible et symétrique P, de première ligne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et de deuxième ligne $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, telles que $A = P\ D\ P^{-1}$.
   Calculer P^{-1}.
3. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice A^n par ses éléments.
4. Soient $u_0,\ v_0,\ w_0$ trois nombres réels positifs ou nuls tels que $u_0 + v_0 + w_0 = 1$.
   On note $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne définie par la relation de récurrence : $X_n = A\ X_{n-1}$.
   a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = A^n X_0$
   b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{3} + \left(u_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ v_n = \dfrac{1}{3} + \left(v_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ w_n = \dfrac{1}{3} + \left(w_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \end{cases}$$
   c) Déterminer les limites respectives $u,\ v,\ w$ de u_n, v_n, w_n lorsque le nombre entier n tend vers l'infini.

   On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $d_n = \sqrt{(u_n - u)^2 + (v_n - v)^2 + (w_n - w)^2}$

   d) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $d_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$
   e) Déterminer un entier naturel n tel que : $d_n \leq 10^{-2}$