1. a) **Attention :** On connait la probabilité d'événements du type $(X = i)$ pour i fixé.
$(X + Y = k)$ peut s'écrire $(Y = k - X)$ mais $k - X$ n'est pas un entier mais une variable aléatoire.
Pour $k \in [|2, n + 1|]$
On peut utiliser deux méthodes :
   - décomposer $(X + Y = k)$ en fonction des valeurs de X et de Y :
   $(X + Y = k) = \bigcup_{i\ldots} [X = i \cap Y = k - i]$
   les valeurs de i étant celles pour lesquelles $X = i$ et $Y = k - i$ sont possibles.
   - calculer la probabilité de $(Y = k - X)$ en conditionnant par la valeur de X pour la fixer : en passant par la formule des probabilités totales.

Par la première méthode :
On veut que $1 \leq i \leq n$ et que $1 \leq k - i \leq n$ que l'on résout par rapport à i, puisque c'est sur i que l'on fait la réunion.
$1 \leq k - i \leq n \Longleftrightarrow k - n \leq i \leq k - 1$
Donc pour avoir les deux contions, il faut
   - que i soit supérieur au plus grand de 1 et de $k - n$. Il faut donc déterminer qui est le plus grand. Celà dépend de k. Et commme $k \leq n + 1$ alors $k - n \leq 1$. Le plus grand des deux est donc 1 et les deux conditions équivalent à $1 \leq i$
   - que i soit inférieur au plus petit de n et de $k - 1$ et commme $k \leq n + 1$ on a $k - 1 \leq n$ et le plus petit des deux et $k - 1$. Les deux conditions équivalent donc à $i \leq k - 1$.

Finalement $(X + Y = k) = \bigcup_{i=1}^{k-1} (X = i \cap Y = k - i)$ et les événements étant incompatibles :

$$\begin{aligned} p(X + Y = k) &= \sum_{i=1}^{k-1} p(X = i \cap Y = k - i) = \sum_{i=1}^{k-1} p(X = i)\, p(Y = k - i) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n}\frac{1}{n} = \frac{k-1}{n^2} \end{aligned}$$

les probabilité sont $1/n$ car dans la somme on a $1 \leq i \leq k - 1$ donc $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq k - i \leq n$ (conditions que l'on a résolu justement)

Par la seconde méthode :
$(X = i)_{i \in [[1,n]]}$ est un système complet d'événements. Donc

$$\begin{aligned} p(Y = k - X) &= \sum_{i=1}^{n} p(Y = k - X / X = i)\, p(X = i) = \sum_{i=1}^{n} p(Y = k - i / X = i)\, p(X = i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p(Y = k - i)\, p(X = i) \quad \text{car } Y \text{ et } X \text{ sont indépendantes} \end{aligned}$$

Attention : pour pouvoir utiliser la loi, il faut savoir, pour X, que $i \in [[1, n]]$, ce qui est le cas, mais également que $k - i \in [[1, n]]$ ce qui n'est pas évident !
$1 \leq k - i \leq n \Longleftrightarrow k - n \leq i \leq k - 1$. Condition qu'il faut donc vérifier.

Comme $k \leq n+1$ alors on a $k-n \leq 1$ et donc et pour tous les indices de la somme la relation est vérifiée..

Mais comme $k \leq n+1$ alors $k-1 \leq n$ et seuls les termes de la somme jusqu'à $k-1$ rentreront dans la loi uniforme...Il faut donc à présent découper la somme en 2 :

$$\begin{aligned} p(Y=k-X) &= \sum_{i=1}^{k-1} p(Y=k-i)\,p(X=i) + \sum_{i=k}^{n} p(Y=k-i)\,p(X=i) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n}\frac{1}{n} + \sum_{i=k}^{n} 0 = \frac{k-1}{n^2} \end{aligned}$$

b) Pour $k \in [|n+2, 2n|]$On refait ici la même décomposition.

Mais cette fois, comme $k \geq n+2$ alors $k-n \geq 2$ et la double condition $1 \leq i$ et $k-n \leq i$ équivaut à $k-n \leq i$

et de même $k \geq n+2$ donc $k-1 \geq n+1$ donc la double condition $i \leq n$ et $i \leq k-1$ équivaut à $i \leq n$

Finalement $(X+Y=k) = \bigcup\limits_{i=k-n}^{n} (X=i \cap Y=k-i)$ et les événements étant incompatibles :

$$\begin{aligned} p(X+Y=k) &= \sum_{i=k-n}^{n} p(X=i \cap Y=k-i) = \sum_{i=k-n}^{n} \frac{1}{n}\frac{1}{n} = \frac{n-(k-n)+1}{n^2} \\ &= \frac{2n-k+1}{n^2} \end{aligned}$$

2. $(Z=k)_{k\in[[1,n]]}$ est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned} P(X+Y=Z) &= \sum_{k=1}^{n} P(X+Y=Z/Z=k)\,p(Z=k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(X+Y=k)\,p(Z=k) \end{aligned}$$

Ici, seule la valeur $k=1$ joue un rôle particulier, où $P(X+Y=1)=0$ car la valeur minimale de la somme est 2.

$$\begin{aligned} P(X+Y=Z) &= \sum_{k=2}^{n} P(X+Y=k)\,p(Z=k) + 0 \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{n^2}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=2}^{n}(k-1) \\ &= \frac{1}{n^3}\sum_{h=1}^{n-1} h = \frac{(n-1)\,n}{n^3 2} = \frac{n-1}{2n^2} \end{aligned}$$

3. a) Ici, on revient à la définition : valeurs possibles et probabilités.

$1 \leq Z \leq n \iff 1 \leq n+1-Z \leq n$ donc $T(\Omega) = [[1,n]]$ et pour tout $k \in [[1,n]]$ on a

$$\begin{aligned} p(T=k) = p(n+1-Z=k) &= p(Z=n+1-k) \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

car $n+1-k \in [[1,n]]$

Finalement $T = n+1-Z$ suit la loi $\mathcal{U}_{[|1,n|]}$.

b) Comme Z est indépendante de X et de Y alors $n+1-Z$ l'est aussi. (les événements liés à T ne sont liés qu'à Z)

c) $P(X+Y+Z=n+1)$ s'écrit $P(X+Y=n+1-Z) = P(X+Y=T)$ et on est ramené aux conditions initiales de l'exercice avec trois variables X, Y et T indépendantes. Donc $P(X+Y+Z=n+1) = \dfrac{n-1}{2n^2}$

EDHEC 1999