Corrigé par Pierre Veuillez

EML 1991

1. **Étude des variables aléatoires F_i.**

   a) Les tirages (avec remise) sont indépendants les uns des autres, la probabilité de tiré le jeton i à chaque tirage est de $1/p$, donc le nombre de fois F_i où le jeton i a été tiré en N tirages suit une loi binomiale de paramètres N et $1/p$.

   Donc $E(F_i) = N/p$ et $V(F_i) = N\left(1 - 1/p\right)\dfrac{1}{p} = \dfrac{N(p-1)}{p^2}$

   b) $F = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} F_i$ est le nombre total de jetons tirés pour tous les numéros de 1 à p. Donc le nombre tirages.

   Donc $F = N$ et $E(F) = N$ et $V(F) = 0$.

   c) Si les variables étaient indépendantes, on aurait $V(F) = \sum_{i=1}^{n} V(F_i)$ ce qui n'est pas le cas ici. Donc les variables ne sont pas indépendantes

2. **Étude des variables aléatoires X_i.**

   a) $(X_i = 0)$ est l'événement "le jeton i n'a pas été tiré" $= (F_i = 0)$

   Donc $p(X_i = 0) = C_N^0 \left(\dfrac{1}{p}\right)^0 \left(1 - \dfrac{1}{p}\right)^N = \left(\dfrac{p-1}{p}\right)^N$ et donc

   $p(X_i = 1) = 1 - \left(\dfrac{p-1}{p}\right)^N$

   Donc $X_i$est une variable de Bernouilli de paramètre $p(X_i = 1)$ et son espérance est $E(X_i) = 1 - \left(\dfrac{p-1}{p}\right)^N$ et $V(X_i) = \left(\dfrac{p-1}{p}\right)^N \left(1 - (\dfrac{p-1}{p})^N\right)$.

   b) Sachant que $X_j = 0$, l'expérience a consisté alors à tirer les jetons parmi $p - 1$(tous sauf le j ème).

   Donc $p\left(X_i = 0/X_j = 0\right) = \left(\dfrac{p-2}{p-1}\right)^N \neq \left(\dfrac{p-1}{p}\right)^N$

   Donc $X_i$et X_j ne sont pas indépendantes.

   c) On ne cherche pas la loi de X mais on calclue directement l'espérance de la somme : $E\left(X\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} E\left(X_i\right) = p\left(1 - \left(\dfrac{p-1}{p}\right)^N\right)$

3. **Application**

   a) Les boules représentent les différents sites; Les tirages représentent les appels. $F_i$est le nombre de fois où le ième site est appelé. X_i indique si le $i$ème site a été ou non appelé.

   X représente le nombre de site qui ont été appelés.

   b) Infaisable sans calculatrice ...

   Ici $E(F_i) = 50/15\#3,3$ donc $p(X_i = 0) = (\frac{14}{15})^{50}\#0,03$ et $E(X_i)\#0,97$ d'où enfin, $E(X)\#14,5$

   Donc, même si chaque site ne reçoit en moyenne que 3 appels, en moyenne les 15 sites (14,5) sont appelé chaque jours. Aussi, la présence du SAV sur chaque site répond-il à un réel besoin.