Corrigé EDHEC 2005 par Pierre Veuillez

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O
Au départ, le mobile est à l'origine.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p $(0<p<1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0=0$.
On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$.
Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T=1$. Si les abscisses successives sont: 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T=4$.
On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$

1. a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $(T=k)$ signifie que le mobile revient en O pour la première fois à k. Donc qu'il y est à k et qu'il n'y était pas avant :

   Conclusion : $\boxed{(T=k)=\bigcap_{i=1}^{k-1}(X_i\neq 0)\cap(X_k=0)}$

   b) Comme il est au point d'abscisse 0 à l'instant 0, il passera en 1 avec une probabilité p et reviendra (restera) en 0 avec une probabilité $1-p$

   Donc $X_1(\Omega)=\{0,1\}$ $\mathrm{P}(X_1=0)=1-p$ et $\mathrm{P}(X_1=1)=p$

   (X_1 suit une loi de Bernouilli de paramètre $1-p$)

   c) En déduire ?????

   Les X_i ne sont pas indépendants, mais on a (probabilités composées)

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T=k) &= \mathrm{P}(X_1\neq 0)\,\mathrm{P}_{X_1\neq 0}(X_2\neq 0)\ldots\mathrm{P}_{X_{k-1}\neq 0}(X_k=0)\\ &= p\cdot p\ldots(1-p)\\ &= p^{k-1}p\end{aligned}$$

   car lorsqu'il n'est pas en O, il y revient avec la probabilité $(1-p)$ et il n'y revient pas (avance d'une case) avec la probabilité p.

   Conclusion : $\boxed{\text{Donc } T \text{ suit une loi géométrique de paramètre } 1-p}$

2. a) On a vu que $X_0(\Omega)=\{0\}$ et $X_1(\Omega)=\{0,1\}$

   Soit $n\geq 1$ tel que $X_n(\Omega)=[[0,n]]$

   Les valeurs possibles de X_n vont de 0 à n. Comme l'abscisse du point peut augmenter de 1, X_{n+1} peut prendre toutes les valeurs de $[[1,n+1]]$.

   Et comme il peut également revenir à l'origine, $X_{n+1}(\Omega)=[[0,n+1]]$

   Donc, par récurrence, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega)=[[0,n]]$

   b) On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X_{n-1}=k)_{0\leq k\leq n-1}$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_n=0) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(X_{n-1}=k)\,\mathrm{P}_{X_{n-1}=k}(X_n=0) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (1-p)\,\mathrm{P}(X_{n-1}=k) \\
&= (1-p)\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(X_{n-1}=k) \\
&= 1-p
\end{aligned}
$$

car la probabilité de revenir en O est $(1-p)$ et que $(X_{n-1}=k)_{0\leq k\leq n-1}$ est un système complet d'événements.

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(X_n=0)=1-p}$

3. a) Comme il ne peut avancer que d'un à chaque étape, pour être en k à l'instant $n+1$, le point devait être en $k-1$ à l'instant précédent.
Donc $(X_{n+1}=k)=(X_n=k-1)\cap(X_{n+1}=k)$
Et

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_{n+1}=k) = {} & \mathrm{P}(X_n=k-1)\,\mathrm{P}_{X_n=k-1}(X_{n+1}=k) \\
& = p\,\mathrm{P}(X_n=k-1)
\end{aligned}
$$

car la probabilité d'avancer d'un est p

Conclusion : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall k\in\{1,2,\dots n+1\},\ \mathrm{P}(X_{n+1}=k)=p\,\mathrm{P}(X_n=k-1)}$

b) Par récurrence :

- Pour $n=1$, et pour $k=0$ on a $\mathrm{P}(X_1=0)=1-p=p^0(1-p)$
- Soit $n\geq 1$ tel que $\forall k\in\{0,1,2\dots,n-1\}$, $\mathrm{P}(X_n=k)=p^k(1-p)$.
Comme $\forall k\in\{1,2,\dots n+1\}$: $\mathrm{P}(X_{n+1}=k)=p\,\mathrm{P}(X_n=k-1)$ alors pour $k-1\in\{0,1,2\dots,n-1\}$,
donc pour $k\in[[0,n]]$: $\mathrm{P}(X_{n+1}=k)=p\,p^{k-1}(1-p)=p^k(1-p)$

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\in\{0,1,2\dots,n-1\},\ \mathrm{P}(X_n=k)=p^k(1-p)}$

et on a $\mathrm{P}(X_{n+1}=n+1)=p.\mathrm{P}(X_n=n)$

En effet, pour être en n à l'instant n, il doit avoir avancé d'un à chaque étape, ceci avec une probabilité de p.

Donc la suite $(\mathrm{P}(X_n=n))_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison p et de premier terme $\mathrm{P}(X_0=0)=1$

Conclusion : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}:\mathrm{P}(X_n=n)=p^n\cdot 1}$

c) Pour calculer la somme, on doit distinguer la valeur $k=n$ et les autres :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}(X_n=k) &= \mathrm{P}(X_n=n)+\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{P}(X_n=k) \\
&= p^n+\sum_{k=0}^{n-1}p^k(1-p) \\
&= p^n+(1-p)\frac{1-p^n}{1-p} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Ce calcul (découpage de $\sum$) n'étant valable que pour $n-1 \geq 0$ donc pour $n \geq 1$
pour $n = 0$: $\sum_{k=0}^{0} \mathrm{P}\left(X_0 = k\right) = 1$

4. Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \dfrac{1}{3}$.

   On rappelle que `random(3)` renvoie au hasard un entier de $\{0, 1, 2\}$.

   Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

   Ici, on a une chance sur trois$= p$ pour que `u` prenne la valeur 2.

   L'abscisse est stockée dans `X`

   Donc quand `u=3` le mobile avance d'un (`X:=X+1`)et sinon, il revient à l'origine (`X:=0`)

   `n` est l'indice n.

```
Program edhec2005 ;
Var k, n, u, X : integer ;
begin
     Readln(n) ;
     Randomize ;
     X:=0;
     For k:=1 to n do
     begin
          u := random(3) ;
          if (u = 2) then X := X+1;
               else X := 0;
          end ;
     Writeln (X) ;
end.
```

5. a) Les trois méthodes classiques pour obtenir ce résultat sont :

   - par récurrence sur n (le plus naturel puisque le résultat est donné)
   - en dérivant la fonction $x \to \sum_{k=1}^{n-1} x$
     $f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} x^k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \sum_{k=1}^{n-1} k\, x^{k-1}$
     Et comme, pour $x \neq 1$, $f(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$ alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-nx^{n-1}(1-x) + (1-x^n)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

     et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\, x^{k-1} = \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n}{(1-x)^2}$ pour tout $x \neq 1$.

- en développant $(1-p)\sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k-1}$:

$$\begin{aligned}
(1-p)\sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k} \\
&= \sum_{h=0}^{n-2} (h+1)\ p^{h} - \sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k} \\
&= \sum_{h=0}^{n-2} p^{h} + \sum_{h=0}^{n-2} h\,p^{h} - \sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k} \\
&= \frac{1-p^{n-1}}{1-p} + 0 - (n-1)\,p^{n-1} \text{ car } p \neq 1 \\
&= \frac{1-p^{n-1} - (1-p)\,(n-1)\,p^{n-1}}{1-p} \\
&= \frac{1-n\,p^{n-1} + (n-1)\,p^{n}}{1-p}
\end{aligned}$$

et donc $(1-p \neq 0)$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k\,p^{k-1} = \frac{1-n\,p^{n-1} + (n-1)\,p^{n}}{(1-p)^2}$$

b) On calcule l'espérance en traitant à part les valeurs $k=0$ et : n : (pour $n \geq 2$)

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\,\mathrm{P}(X=k) = 0\,\mathrm{P}(X=0) + n\,\mathrm{P}(X=n) + \sum_{k=1}^{n-1} k\,\mathrm{P}(X=k) \\
&= n\,p^{n} + \sum_{k=0}^{n-1} k\,(1-p)\,p^{k} \text{ on fait réapparaître l'expression précédente} \\
&= n\,p^{n} + (1-p)\,p\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} \\
&= n\,p^{n} + (1-p)\,p\frac{1-n\,p^{n-1} + (n-1)\,p^{n}}{(1-p)^2} \\
&= p\frac{n\ p^{n-1}\,(1-p) + 1 - n\ p^{n-1} + (n-1)\,p^{n}}{1-p} \\
&= p\frac{1-p^{n}}{1-p}
\end{aligned}$$

formule qui est également valable pour $n=0$ et $n=1$.

6. a) On a $\mathrm{P}(X_{n+1}=k) = p\mathrm{P}(X_n = k-1)$ pour $k \in [[1, n+1]]$
D'après le théorème de transfert,

$$
\begin{aligned}
E\left(X_{n+1}^2\right) &= \sum_{k=0}^{n+1} k^2 \mathrm{P}\left(X_{n+1}=k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} k^2 p \mathrm{P}\left(X_n = k-1\right) \\
&= p \sum_{h=-1}^{n} (h+1)^2 p \mathrm{P}\left(X_n\right) \\
&= p \sum_{h=0}^{n} \left(h^2+2h+1\right) p \mathrm{P}\left(X_n\right) + 0 \\
&= p \left(\sum_{h=0}^{n} h^2 p \mathrm{P}\left(X_n\right) + 2 \sum_{h=0}^{n} h p \mathrm{P}\left(X_n\right) + \sum_{h=0}^{n} p \mathrm{P}\left(X_n\right) \right) \\
&= p \left(E\left(X_n^2\right) + 2E\left(X_n\right) + 1 \right)
\end{aligned}
$$

b) Avec $u_n = E\left(X_n^2\right) + (2n-1)\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$, on a :

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} &= E\left(X_{n+1}^2\right) + (2(n+1)-1)\frac{p^{n+2}}{1-p} \\
&= p\left(E\left(X_n^2\right) + 2E\left(X_n\right) + 1\right) + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p} \\
&= pE\left(X_n^2\right) + 2p^2\frac{1-p^n}{1-p} + p + (2n+1)\frac{p^{n+2}}{1-p} \\
&= pE\left(X_n^2\right) + p^2\frac{2(1-p^n)+(2n+1)p^n}{1-p} + p \\
&= pE\left(X_n^2\right) + p^2\frac{2+(2n-1)p^n}{1-p} + p \\
&= pE\left(X_n^2\right) + \frac{p^2+p+(2n-1)p^{n+2}}{1-p}
\end{aligned}
$$

en remplaçant $E(X_n)$ par sa valeur.

Et en partant du second membre :

$$
\begin{aligned}
p\,u_n + \frac{p(1+p)}{1-p} &= p\left(E\left(X_n^2\right) + (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p}\right) + \frac{p(1+p)}{1-p} \\
&= p\,E\left(X_n^2\right) + \frac{p^2+p+(2n-1)p^{n+2}}{1-p} \\
&= u_{n+1}
\end{aligned}
$$

Conclusion : $\boxed{u_{n+1} = p\,u_n + \dfrac{p(1+p)}{1-p}}$

c) La suite u est donc arithmético-géométrique.

On détermine c tel que $c = p\,c + \frac{p(1+p)}{1-p} \iff c(1-p) = \frac{p(1+p)}{1-p} \iff c = \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}$

Et soit $v_n = u_n - c$ pour tout n entier.

On a alors $v_{n+1} = u_{n+1} - c = p\,u_n + \frac{p(1+p)}{1-p} - \left(p\,c + \frac{p(1+p)}{1-p}\right) = p\,v_n$

Et la suite v est géométrique de raison p et de premier terme $v_0 = u_0 - \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}$
avec $u_0 = E\left(X_0^2\right) + -\frac{p}{1-p} = -\frac{p}{1-p}$ donc $v_0 = -\frac{p}{1-p} - \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} = \frac{-2p}{(1-p)^2}$
$v_n = \dfrac{-2p^{n+1}}{(1-p)^2}$ et $u_n = v_n + c = \frac{-2p^{n+1}}{(1-p)^2} + \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} = \frac{-2p^{n+1}+p(1+p)}{(1-p)^2}$
Et comme

$$\begin{aligned}
E\left(X_n^2\right) &= u_n - (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p} \\
&= \frac{-2p^{n+1} + p(1+p)}{(1-p)^2} - (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p} \\
&= \frac{-2p^{n+1} + p(1+p) - (1-p)(2n-1)p^{n+1}}{(1-p)^2} \\
&= \frac{(-2n-1+p(2n-1))p^{n+1} + p(1+p)}{(1-p)^2}
\end{aligned}$$

d) On développe le calcul de la variance :

$$\begin{aligned}
V(X_n) &= E\left(X_n^2\right) - E(X_n)^2 \\
&= \frac{(-2n-1+p(2n-1))p^{n+1} + p(1+p)}{(1-p)^2} - p^2\frac{(1-p^n)^2}{(1-p)^2} \\
&= \frac{(-2n-1+p(2n-1))p^{n+1} + p(1+p) - p^2\left(1-2p^n+p^{2n}\right)}{(1-p)^2} \\
&= \frac{p}{(1-p^2)}\left[(-2n-1+p(2n-1))p^n + 1 + p - p\left(1-2p^n+p^{2n}\right)\right] \\
&= \frac{p}{(1-p^2)}\left[(-2n-1+p(2n+1))p^n + 1 - p^{2n+1}\right] \\
&= \frac{p}{(1-p^2)}\left[1 + (2n+1)(-1+p)p^n - p^{2n+1}\right]
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.