Corrigé EDHEC 2004 par Pierre Veuillez

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On lance n fois une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité et face également avec la probabilité), les lancers étant supposés indépendants.
On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun pile pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier pile.

1. a) Le premier pile advient au plus tôt au premier tirage et au plus tard au $n^{ème}$ lancer. Enfin, si l'on n'a pas de pile, $Z = 0$.

   Donc les valeurs possibles de Z sont : $Z(\Omega) = [[0, n]]$

   b) Si $k \neq 0$ (donc si $1 \leq k \leq n$) alors $(Z = k)$ signifie que l'on a le premier pile lors du $k^{ième}$ lancer.

   Donc $(Z = k) = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k$.

   Les lancers étant indépendants, $P(Z = k) = P(F_1)\ P(F_2) \ldots P(F_{k-1})\ P(P_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ si $1 \leq k \leq n$.

   Enfin si $k = 0$ alors $Z = 0$ signifie que l'on a pas eu de pile lors de ces n lancers.

   Donc $(Z = 0) = F_1 \cap \cdots \cap F_n$ et comme les lances sont indépendants, $P(Z = 0) = P(F_1) \ldots P(F_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

   Donc $P(Z = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $P(Z = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ si $1 \leq k \leq n$

   c) On calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(Z = k)$ en mettant à part la valeur $k = 0$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} P(Z=k) &= P(Z=0) + \sum_{k=1}^{n} P(Z=k) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ réindexé } h = k-1 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{h=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{h+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{h=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^h \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1
\end{aligned}$$

   Ce qui est cohérent avec une loi de variable aléatoire.

   d) Dans le programme, `k` est le compteur de lancers, et `Z` la variable aléatoire.

   On effectue des lancers jusqu'à ce que l'on ait pile `(lancer = 1)` ou que l'on ait effectué n lancers `or (k = n)`.

   Si on obtient pile, (`lancer = 1`) alors `Z` est affecté du nombre de lancers effectués (`z := k`), sinon, il conserve sa valeur initiale (`z := 0`)

   Enfin, le nombre maximal de lancer n est saisit au clavier par `Readln(n)`.

```
Program EDHEC2004 ;
var k, n, z, lancer :  integer ;
Begin
Randomize ;
```

```
Readln(n) ; k := 0 ; z := 0 ;
Repeat
k := k + 1 ; lancer := random(2) ;
If (lancer = 1) then z := k ;
until (lancer = 1) or (k = n) ;
Writeln (z) ;
end.
```

On dispose de $n+1$ urnes $U_0,\ U_1, \ldots, U_n$ telles que pour tout k de $\{0, 1, ..., n\}$ l'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.

On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes de la façon suivante : si après les lancers de la pièce décrits dans la première question, la variable Z prend la valeur k (avec $k \geq 1$), alors on tire une par une et avec remise, k boules dans l'urne U_k et l'on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de ces tirages. Si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

2. Au minimum, on a $X = 0$ (quand on a $Z = 0$ ou quand on n'obtient aucune boule blanche) au maximum, on fait n tirages (quand $Z = n$) dans l'urne n qui contient n boules blanches.

   Donc,on obtient au minimum, $X = 0$ boules blanches et au maximum, on a $X = n$, toutes les valeurs intermédiaires étant possibles.

   Et $X(\Omega) = [[0, n]]$

3. a) Quand $Z = 0$, on a $X = 0$ donc $P_{Z=0}(X = 0) = 1$ et $P_{Z=0}(X = i) = 0$ si $1 \leq i \leq n$.

   b) Quand $Z = n$, on effectue n tirages dans l'urne n qui ne contient n boules blanches et 0 boules noires. On obtiendra donc n boules blanches.

   Donc$P_{Z=n}(X = n) = 1$ et $P_{Z=n}(X = i)$ si $0 \leq i \leq n-1$.

   c) Quand $Z = k$ $(1 \leq k \leq n-1)$ on effectue k tirages indépendants dans l'urne k qui contient k boules blanches et $n-k$ noires. Les boules étant équiprobables, la probabilité d'obtenir une blanche et de k/n à chaque tirage.

   Donc le nombre de boules blanche obtenues suit une loi binomiales, $\mathcal{B}(k, k/n)$

   $P_{Z=k}(X = i) = \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}$ si $0 \leq\ i \leq\ k$ et $P_{Z=k}(X = i) = 0$ sinon.

4. a) On connaît les probabilités conditionnelles $P_{Z=k}(X = 0)$ et on veut la probabilité $P(X = 0)$.

   On utilise donc la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(Z = k)_{k\in[[0,n]]}$

$$p(X = 0) = \sum_{k=0}^{n} P_{Z=k}(X = 0)\ P(Z = k)$$

   Comme on a des formules particulières pour $k = 0$ et $k = n$, on les traite à part :

$$p(X = 0) = P_{Z=0}(X = 0)\ P(Z = 0) + P_{Z=n}(X = 0)\ P(Z = n) + \sum_{k=1}^{n-1} P_{Z=k}(X = 0)\ P(Z = k)$$

   Les valeurs $P_{Z=0}(X = 0)$, $P(Z = 0)$, $P_{Z=n}(X = 0)$ et $P(Z = n)$ ont déjà été calculées.

Dans la somme, on a $0 \leq k$ avec $k \geq 1$ donc $P_{Z=k}(X=0)$ est donnée par la loi binomiale.

$$\begin{aligned} p(X=0) &= 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 0\,P(Z=n) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{k}{0} \left(\frac{k}{n}\right)^0 \left(\frac{n-k}{n}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k \\ &= \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k \end{aligned}$$

b) Pour $X=n$, on ne peut obtenir n boules blanches qu'en faisant n tirages, donc si $Z=n$. Donc $(X=n)=(Z=n \cap X=n)$
Comme on a $X=n$ dès que $Z=n$ (dans l'urne n, il n'y a que des boules blanches) $(X=n)=(Z=n)$
Donc

$$P(X=n) = p(Z=n) = \frac{1}{2^n}$$

c) Pour tout i de $\{1,2,...,n-1\}$, on réutilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(Z=k)_{k\in[[0,n]]}$

$$p(X=i) = \sum_{k=0}^{n} P_{Z=k}(X=i)\; P(Z=k)$$

avec, là encore, les valeurs $k=0$ et n à traiter à part et $P_{Z=k}(X=i)$ est sinon donné par la loi binomiale, donc avec deux formules différentes pour $k \geq i$ et $k < i$ (à exprimer par rapport à k, car c'est lui l'indice de sommation)
D'où le découpage de la somme:

$$\begin{aligned} p(X=i) &= P_{Z=0}(X=i)\; P(Z=0) + P_{Z=n}(X=i)\; P(Z=n) \\ &+ \sum_{k=1}^{i-1} P_{Z=k}(X=i)\; P(Z=k) + \sum_{k=i}^{n-1} P_{Z=k}(X=i)\; P(Z=k) \\ &= 0 + 0 + + \sum_{k=1}^{i-1} 0 \cdot P(Z=k) + \sum_{k=i}^{n-1} P_{Z=k}(X=i)\; P(Z=k) \\ &= \sum_{k=i}^{n-1} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{aligned}$$

avec $k \geq 1$ donc $P(Z=k) = (1/2)^k$

5. On calcule $\sum_{i=0}^{n} P(X=i)$ en traitant à part $i=0$ et $i=n$:

$$\sum_{i=0}^{n} P(X=i) = P(X=0) + P(X=n) + \sum_{i=1}^{n-1} P(X=i)$$

$$= \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \frac{1}{2^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i}^{n-1} \binom{k}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

La somme double $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1}$ porte sur les i et k tels que$1 \leq i \leq k \leq n-1$ que l'on réordonne : $1 \leq k \leq n-1$ et $1 \leq i \leq k$

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}\left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array}\right)\left(\frac{k}{n}\right)^{i}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} \text{ (on reconnaît le binôme)} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left[\sum_{i=0}^{k}\left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array}\right)\left(\frac{k}{n}\right)^{i}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} - \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(\frac{k}{n}+\frac{n-k}{n}\right)^{k} - \left(\frac{n-k}{n}\right)^{k}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} \\
&= \sum_{h=0}^{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^{h+1} - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k} \\
&= 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k}
\end{aligned}$$

D'où le total :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} P\left(X=i\right) &= \frac{2}{2^{n}} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^{k} \\
&= 1
\end{aligned}$$