Corrigé ECRICOME 2001 par Pierre Veuillez

Première partie

1. on a:

$$\begin{aligned} M(a).M(b) &= \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2b & b & b \\ b & 1-2b & b \\ b & b & 1-2b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-2b-2a+4ab+2b & a+b-3ab & a+b-3ab \\ a-2ab+b-2ba+ab & 1-2\left(a+b-3ab\right) & a+b-3ab \\ ab+a-2ab+b-2ba & a+b-3ab & 1-2\left(a+b-3ab\right) \end{pmatrix} = M(a+b-3ab) \end{aligned}$$

   Onpeut donc calculer le produit de deux matrices de ce type juste avec leurs paramètres.

2. On cherche l'inverse de $M\left(a\right)$ sous lla forme de $M\left(b\right)$. Comme $M\left(0\right)=I$, il suffit d'avoir $M\left(a\right)M\left(b\right)=M\left(0\right)$ donc

$$a+b-3ab=0 \Leftrightarrow b\left(1-3a\right)=-a \Leftrightarrow b=-a/\left(1-3a\right) \quad \text{si } a\neq 1/3$$

   Donc si $a\neq 1/3$ on a $b=-a/\left(1-3a\right)$ qui est solution. Donc avec cette valeur de b, $M\left(a\right)\cdot M\left(b\right)=M\left(0\right)=I$ et $M\left(b\right)\cdot M\left(a\right)=I$ donc $M\left(a\right)$ est inversible et son ibnverse est : $M\left(a\right)^{-1}=M\left(-a/\left(1-3a\right)\right)$

   $M\left(1/3\right)^2=M\left(1/3\right)M\left(1/3\right)=M\left(1/3+1/3-1/3\right)=M\left(1/3\right)$

   Or si $M\left(1/3\right)$ est inversible alors elle a une inverse B et $B\cdot M\left(1/3\right)^2=\left(B\cdot M\left(1/3\right)\right)\cdot M\left(1/3\right)=M\left(1/3\right)$

   et $B\cdot M\left(1/3\right)^2=B\cdot M\left(1/3\right)=I$ donc $M\left(1/3\right)=I$; Or $M\left(1/3\right)\neq I$

   Donc $M\left(1/3\right)$ n'est pas inversible.

3. $a_0=1/3$ est une solution de

$$\left[M(a_0)\right]^2=M(a_0)$$

   Est-ce la seule?

$$\begin{aligned} \left[M(x)\right]^2=M(x) &\Leftrightarrow M\left(2x-3x^2\right)=M\left(x\right) \\ &\Leftrightarrow 2x-3x^2=x \\ &\Leftrightarrow x-3x^2=0 \quad \text{polynôme} \\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=1/3 \end{aligned}$$

   Donc c'est bien la seule solution non nulle.

4. On considère les matrices :

$$P=M(a_0) \quad \text{et} \quad Q=I-P$$

   On a donc $P^2=P$

   et $P=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) On a $M(a)=\begin{pmatrix}1-2a & a & a\\ a & 1-2a & a\\ a & a & 1-2a\end{pmatrix}$ et

$P+\alpha Q=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}+\dfrac{\alpha}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1+2\alpha & 1-\alpha & 1-\alpha\\ 1-\alpha & 1+2\alpha & 1-\alpha\\ 1-\alpha & 1-\alpha & 1+2\alpha\end{pmatrix}$

Donc

$$M(a)=P+\alpha Q \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 1+2\alpha=3(1-2a)\\ 1-\alpha=3a\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2\alpha=2-6a\\ \alpha=1-3a\end{array}\right. \Leftrightarrow \alpha=1-3a$$

Donc $\alpha=1-3a$ convient (et c'est le seul) pour : $\quad M(a)=P+\alpha Q$

b) $P^2=P$ d'après la définition de P

$QP=(I-P)P=P-P^2=P-P=0$

$PQ=P(I-P)=P-P^2=0$

$Q^2=(I-P)^2=I-P-P+P^2=I-2P+P=I-P=Q$

c) On procède par récurrence:

Pour $n=1$, $\quad [M(a)]^1=M(a)=P+\alpha Q$ donc $x_1=1$ et $y_1=\alpha$ conviennent

(celà était déjà vrai pour $n=0$ mais l'énnoncé ne le demandait qu'à partir de 0)

Soit $n\geq 1$ tel qu'il existe x_n et y_n réels tels que $[M(a)]^n=x_nP+y_nQ$ alors

$[M(a)]^{n+1}=(x_nP+y_nQ)(P+\alpha Q)=x_nP^2+y_nQP+\alpha x_nPQ+\alpha y_nQ^2=x_nP+\alpha y_nQ$

Donc avec $x_{n+1}=x_n$ et $y_{n+1}=\alpha y_n$ qui sont bien des réels, on a $[M(a)]^{n+1}=x_{n+1}P+y_{n+1}Q$

d) La suite x est constante donc égale à $x_1=1$ et y est géométrique de raison α donc $y_n=\alpha^{n-1}y_1=\alpha^n$

donc pour tout entier $n\geq 1$, $\quad [M(a)]^n=P+\alpha^nQ$

Variante c) Variante:On pouvait aussi utiliser:

Pour tout entier $n\neq 0$, $P^n=P$ et $Q^n=Q$

Et comme $M(a)=P+\alpha Q$, on a $PQ=QP$ donc d'après la formule du binôme, on a pour tout entier n :

$$[M(a)]^n=[P+\alpha Q]^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kP^k\alpha^{n-k}Q^{n-k}$$

Et pour $k\geq 1$ $\quad P^k=P$ et pour $n-k\geq 1$ (i.e. $k\leq n-1$) $Q^{n-k}=Q$ donc

$$\begin{aligned}[M(a)]^n&=C_n^0P^0\alpha^nQ^n+C_n^nP^nQ^0+\sum_{k=1}^{n-1}C_n^k\alpha^{n-k}PQ\\ &=\alpha^nQ^n+P^n+\sum_{k=1}^{n-1}0=\alpha^nQ+P\end{aligned}$$

e) On a donc avec $\alpha=1-3a$

$M(a)^n=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}+\dfrac{\alpha^n}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1+2\alpha^n & 1-\alpha^n & 1-\alpha^n\\ 1-\alpha^n & 1+2\alpha^n & 1-\alpha^n\\ 1-\alpha^n & 1-\alpha^n & 1+2\alpha^n\end{pmatrix}$

:

Deuxième partie

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $a \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$.

1. On définit des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par leur premier terme p_1, q_1, r_1, et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} p_{n+1} = (1-2a)p_n + aq_n + ar_n \\ q_{n+1} = ap_n + (1-2a)q_n + ar_n \\ r_{n+1} = ap_n + aq_n + (1-2a)r_n \end{cases}$$

   a) Comme $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = M(a) \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$ on a alors pour tout entier n,

   $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = [M(a)]^{n-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = [\alpha^{n-1}Q + P] \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix}$

   b) On a $\alpha = 1 - 3a$ et comme $0 < a < 2/3$ alors $0 > -3a > -2$ et $1 > 1 - 3a > -1 <$ donc $|\alpha| < 1$ donc $\alpha^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

   Donc $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\to} P \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(p_1 + q_1 + r_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. a) (M_n, S_n, B_n) formant un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned} p(M_{n+1}) &= p(M_{n+1}/M_n)\, p(M_n) + p(M_{n+1}/S_n)\, p(S_n) + p(M_{n+1}/B_n)\, p(B_n) \\ &= \frac{2}{3}p(M_n) + \frac{1}{6}p(S_n) + \frac{1}{6}p(B_n) \end{aligned}$$

   et de la même façon

$$\begin{aligned} p(S_{n+1}) &= \frac{1}{6}p(M_n) + \frac{2}{3}p(S_n) + \frac{1}{6}p(B_n) \\ p(B_{n+1}) &= \frac{1}{6}p(M_n) + \frac{1}{6}p(S_n) + \frac{2}{3}p(B_n) \end{aligned}$$

   b) On rretrouve les relations de récurrence précédentes avec $p_n = p(M_n)$, $q_n = p(S_n)$ et $r_n = p(B_n)$ et $a = 1/6 \in]0, 2/3[$ et $\alpha = 1 - 3/6 = 1/2$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p(M_n) \\ p(S_n) \\ p(B_n) \end{pmatrix} &= \left(\frac{1}{2^{n-1}}Q + P\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{n-1}}Q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 - 1/2^{n-1} \\ 1 + 2/2^{n-1} \\ 1 - 1/2^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   donc $p(M_n) = p(B_n) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$ et $p(S_n) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$

   c) Et quand n tend vers $+\infty$ ces troisa probabilités tendent vers $1/3$

(D'après ECRICOME 2001)