**Corrigé ECRICOME 93** par Pierre Veuillez

1. Comme utliser les porduits $X$, $Y$ ou $Z$ le $n^{ième}$ mois forme un système complet d'événements alors

$$\begin{aligned} p\left(X_{n+1}\right) &= p\left(X_{n+1}/X_n\right)p\left(X_n\right)+p\left(X_{n+1}/Y_n\right)p\left(Y_n\right) \\ &\quad +p\left(X_{n+1}/Z_n\right)p\left(Z_n\right) \\ &= 0,4p\left(X_n\right)+0,3p\left(Y_n\right)+0,2p\left(Z_n\right) \end{aligned}$$

donc $x_{n+1}=0,4x_n+0,3y_n+0,2z_n$ et de même $y_{n+1}=0,3x_n+0,4y_n+0,1z_n$ et $z_{n+1}=0,3x_n+0,3y_n+0,7z_n$

2. On considère les matrices $A=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}, U_n=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$.

   Comme les choix de $X$, $Y$ et $Z$ sont exclusifs, on a $p\left(X_n\right)+p\left(Y_n\right)+p\left(Z_n\right)=1$ donc $z_n=1-x_n-y_n$

   Donc $x_{n+1}=0,4x_n+0,3y_n+0,2\left(1-x_n-y_n\right)=0,2+0,2x_n+0,1y_n$

   et $y_{n+1}=0,3x_n+0,4y_n+0,1\left(1-x_n-y_n\right)=0,1+0,2x_n+0,3y_n$

   D'où

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,2+0,2x_n+0,1y_n \\ 0,1+0,2x_n+0,3y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0,2x_n+0,1y_n \\ 0,2x_n+0,3y_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   et pour tout entier $n$ : $\qquad U_{n+1}=A.U_n+B$

3. On cherche la colonne $C$ par ses composantes : $C=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

   $C=A.C+B\Longleftrightarrow\left(I-A\right)C=B\Longleftrightarrow\begin{pmatrix} 0,8 & -0,1 \\ -0,2 & 0,7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$

   $\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l} 8x-y=2 \qquad L1+4L2 \\ -2x+7y=1 \end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l} 27y=6 \\ -2x+7y=1 \end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l} y=2/9 \\ x=5/18 \end{array}\right.$

   Donc la colonne $C=\dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ convient (et c'est la seule)

4. On considère la matrice $V_n=U_n-C$.

   On a $V_{n+1}=U_{n+1}-C=AU_n+B-\left(AC+B\right)=AU_n-AC=A\left(U_n-C\right)=AV_n$

   Donc la suite $V$ est géométrique matricielle de raison $A$ et $V_n=A^nV_0$

5. a) On applique la méthode de Gauss :

   $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{c} L_1 \\ L_1+L_2 \end{array}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{c} L_1-L_2/3 \\ L_2/3 \end{array}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

   Donc $P$ est inversible et $P^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   b) On a $D=P^{-1}\cdot A\cdot P=\dfrac{1}{30}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{30}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

   donc $D=\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

c) On a donc $A = PDP^{-1}$ et $A^n = PD^nP^{-1}$

Comme $D$ est diagonale, $D^n = \frac{1}{10^n}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$ et

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{3\cdot 10^n}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3\cdot 10^n}\begin{pmatrix} 2+4^n & -1+4^n \\ -2+2\times 4^n & 1+2\times 4^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. a) On a alors $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = U_n = V_n + C = A^nV_0 + C$

avec $V_0 = U_0 - C = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{45}\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ on obtient :

$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{45}\dfrac{1}{3\cdot 10^n}\begin{pmatrix} 2+4^n & -1+4^n \\ -2+2\times 4^n & 1+2\times 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

d'où $x_n = -\dfrac{1}{45}\dfrac{5+3\times 4^n}{10^n} + \dfrac{5}{18}$ et $y_n = \dfrac{1}{45}\dfrac{-5+6\times 4^n}{10^n} + \dfrac{2}{9}$

b) enfin $z_n = 1 - x_n - y_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{45}\dfrac{5+3\times 4^n}{10^n} - \dfrac{1}{45}\dfrac{-5+6\times 4^n}{10^n}$

c) Et quand $n$ tend vers $+\infty$ (à long terme) on a $x_n \to 5/18$ : $y_n \to 2/9$ et $z_n \to 1/2$

**(ECRICOME 93)**