# Partie I

On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit de plus la matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

1. On a $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J$

   d'où $J^3 = J \cdot J^2 = 3J^2 = 3^2 J$ et par récurrence, on prouverait que $J^n = 3^{n-1}J$ pour tout $n \geq 1$.

   (On a aussi plus rapidement : $J^{n+1} = J^{n-1}J^2$ pour $n-1 \geq 0$ et donc $J^{n+1} = 3J^n$ suite géométrique de raison 3 et de premier terme $J^1 = J$ donc $J^n = 3^{n-1}J$ pour $n \geq 1$ )

2. On peut le prouver par récurrence en montrant d'abord

   $M = \frac{1}{2}I + \frac{1}{6}J$

   Si $M^n = \frac{1}{2^n}I + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) J$ alors

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n M = \left(\frac{1}{2^n}I + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) J\right)\left(\frac{1}{2}I + \frac{1}{6}J\right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}I + \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) J + \frac{1}{6}\frac{1}{2^n}J + \frac{1}{18}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) J^2 \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}I + \frac{1}{6}J + \frac{1}{18}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) 3J = \frac{1}{2^{n+1}}I + \frac{1}{6}\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) J \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}I + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) J \end{aligned}$$

   ou bien utiliser la formule du binôme :

   Comme $I \cdot J = J = J \cdot I$ alors

$$M^n = \left(\frac{1}{2}I + \frac{1}{6}J\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \frac{1}{6^k} J^k \frac{1}{2^{n-k}} I^{n-k}$$

   et comme la puissance de $J$ est donnée par une formule différente pour $k = 0$, on découpe la somme (ce que l'onpeut faire si les bornes sont $1 \leq n$ et donc le cas $n = 0$ sera à vérifier à part):

$$M^n = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \frac{1}{6^k} \frac{1}{2^{n-k}} 3^{k-1} J + \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2^n} I$$

   où l'on fait réapparaîter la formule du binôme, mais pour les réels cette fois :

$$M^n = \frac{1}{3}\left[\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{3}{6}\right)^k \frac{1}{2^{n-k}} - \frac{1}{2^n}\right] J + \frac{1}{2^n} I$$

$$= \frac{1}{2^n} I + \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2^n}\right) J$$
$$= \frac{1}{2^n} I + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) J$$

et la formule est également vraie pour $n = 0$.

## Partie II

Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle $ABC$ de la façon suivante : si, à l'instant $n$, il est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant $(n+1)$, soit il y reste, avec une probabilité de $\dfrac{2}{3}$, soit il se place sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité.
On note $A_n$ l'événement : " le mobile se trouve en $A$ à l'instant $n$ ".
$B_n$ l'événement : " le mobile se trouve en $B$ à l'instant $n$ ".
$C_n$ l'événement : " le mobile se trouve en $C$ à l'instant $n$ ".
On pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.
**Attention** à ne pas confondre les porbabilités (en minuscule ) et les événements (en majuscule)

1. Comme $(A_n, B_n, C_n)$ est un système complet d'événements alors $a_n + b_n + c_n = 1$

2. a) Comme $(A_n, B_n, C_n)$ est un systèeme complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales on a

$$\begin{aligned} a_{n+1} = \mathrm{P}\left(A_{n+1}\right) = \mathrm{P}_{A_n}\left(A_{n+1}\right)\mathrm{P}\left(A_n\right) + \mathrm{P}_{B_n}\left(A_{n+1}\right)\mathrm{P}\left(B_n\right) + \mathrm{P}_{C_n}\left(A_{n+1}\right)\mathrm{P}\left(C_n\right) \\ = \frac{2}{3}\mathrm{P}\left(A_n\right) + \frac{1}{6}\mathrm{P}\left(B_n\right) + \frac{1}{6}\mathrm{P}\left(C_n\right) \\ = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6}c_n \end{aligned}$$

et de la même façon : $b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{6}c_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{2}{3}c_n$

b) On a

$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6}c_n - \left(\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{6}c_n\right) \\ = \frac{1}{2}\left(a_n - b_n\right) \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6}c_n - \left(\frac{1}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{2}{3}c_n\right) \\ = \frac{1}{2}\left(a_n - c_n\right) \end{aligned}$$

3. On suppose, dans cette question seulement, que le mobile se trouve en $A$ à l'instant 0.

a) On a alors $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = 1$ et comme les suites $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont géométriques de raison 1/2c, alors $a_n - b_n = \frac{1}{2^n}\left(a_0 - b_0\right) = \frac{1}{2^n}$ pour tout entier $n$ et $a_n - c_n = \frac{1}{2^n}$
Comme de plus $a_n + b_n + c_n = 1$, on a la troisième équation permettant de trouver :
$c_n = b_n = a_n - \frac{1}{2^n}$ et donc $a_n + 2\left(a_n - \frac{1}{2^n}\right) = 1$ soit

$$a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3\cdot 2^n} \text{ et } b_n = c_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 2^n}$$

b) La matrice $M^n$ est $M^n = \frac{1}{2^n}I + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$ et la première colonne est bien celle prévue.

c) Celà vient du fait que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ et cette suite est donc géométrique matricielle de raison $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = M$

Donc $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ce qui donne la première colonne de $M^n$.

4. Donc, en prenant comme conditioninitiale le point en $B$ ou en $C$, on trouvera les coonnes 2 et 3 de cette matrice.

(EDHEC 1996)