

1 Partie I

On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit de plus la matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

1. Exprimer J^2 , puis pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, J^n en fonction de J .
2. En déduire que, pour tout entier naturel n : $M^n = \frac{1}{2^n}I + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)J$.

Partie II

Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle ABC de la façon suivante : si, à l'instant n , il est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant $(n+1)$, soit il y reste, avec une probabilité de $\frac{2}{3}$, soit il se place sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité.

On note A_n l'événement : “ le mobile se trouve en A à l'instant n ”.

B_n l'événement : “ le mobile se trouve en B à l'instant n ”.

C_n l'événement : “ le mobile se trouve en C à l'instant n ”.

On pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Pour tout n entier naturel, déterminer $a_n + b_n + c_n$.
2. a) Exprimer, pour tout entier naturel n , a_{n+1} , b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n , b_n et c_n .
b) Déduire de la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n) \quad \text{et} \quad a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - c_n).$$

3. On suppose, dans cette question seulement, que le mobile se trouve en A à l'instant 0.
 - a) Calculer a_n , b_n et c_n en fonction de n .
 - b) Vérifier que $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ est la première colonne de M^n .
 - c) Démontrer ce résultat.
4. Expliquer comment retrouver, grâce à une méthode analogue à celle employée dans la troisième question, les deux autres colonnes de M^n (aucun calcul n'est demandé).

(EDHEC 1996)