(EML 2001) corrigé par Pierre Veuillez

1. **a)** f est continue en x tel que $e^x - 1 \neq 0$.

$e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ car exp est strictment croissante sur $\mathbb{R}$ et que x et 0 en sont éléments. Donc f est continue sur $]0, +\infty[$.

En 0 : $\dfrac{x}{e^x - 1} \underset{x\to 0}{\to} 0 = f(0)$ car $e^x - 1 \sim x$ donc f est continue en 0.

Donc f est continue sur $[0; +\infty[$.

b) f est de classe C^1 en tout x tel que $e^x - 1 \neq 0$ donc sur $]0; +\infty[$. (quotient de fonctions C^1)

et pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{(1 - x) e^x - 1}{(e^x - 1)^2}.$$

c) On a donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1 - x) e^x - 1}{(e^x - 1)^2} = \frac{(1 - x)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right) - 1}{\left(x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right)^2} \\ &= \frac{1 - x + x - x^2 + x^2/2 + x^2\varepsilon_2(x) - 1}{x^2(1 + \varepsilon_3(x))} = \frac{-x^2/2 + x^2\varepsilon_2(x)}{x^2(1 + \varepsilon_3(x))^2} \\ &= \frac{-1/2 + \varepsilon_2(x)}{(1 + \varepsilon_3(x))^2} \underset{x\to 0}{\to} -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

d) Comme $f(x) \underset{x\to 0}{\to} f(0)$ et que $f'(x) \underset{x\to 0}{\to} -1/2$ alors le taux déaccroissement a la même limite. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -1/2$

De plus $f'(x) \underset{x\to 0}{\to} f'(0)$ donc f' est continue en 0. Finalement que f est C^1 sur $[0; +\infty[$.

2. **a)** f est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions de classe C^2 et $\forall x \in]0; +\infty[$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(1 - x - 1) e^x (e^x - 1)^2 - 2[(1 - x) e^x - 1](e^x - 1) e^x}{(e^x - 1)^4} \\ &= \frac{(e^x - 1)[-xe^x(e^x - 1) - 2[(1 - x) e^x - 1] e^x]}{(e^x - 1)^4} \\ &= \frac{-xe^{2x} + xe^x - 2[e^{2x} - xe^{2x} - e^x]}{(e^x - 1)^3} \\ &= \frac{e^x}{(e^x - 1)^3}(xe^x - 2e^x + x + 2) \end{aligned}$$

b) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = xe^x + e^x - 2e^x + 1 = (x - 1) e^x + 1$

g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g"(x) = e^x + (x - 1) e^x = xe^x$ d'où les variations et les signes :

x	0	$+$	$+\infty$
$g"(x)$	0	$+$	
$g'(x)$	0	$\nearrow +$	
$g(x)$	0	$\nearrow +$	

et pour f :

x	0	$+$	$+\infty$
$g(x)$	0	$+$	
$e^x - 1$	0	$\nearrow +$	
$f"(x)$	0	$+$	
$f'(x)$	$-1/2$	$\nearrow -$	0
$f(x)$	1	$\searrow$	0

en $+\infty$

$$f'(x) = \frac{(1-x)\,e^x - 1}{(e^x-1)^2} = \frac{xe^x\left[\left(-1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{xe^x}\right]}{e^{2x}\,(1-1/e^x)^2} = \frac{x\left[\left(-1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{xe^x}\right]}{e^x\,(1-1/e^x)^2}$$
$$\to 0 \quad \text{car} \quad x \ll e^x$$

D'où $\quad \forall x \in]0;+\infty[, \quad f''(x) > 0$. (la courbe est convexe)

c) Comme f' est croissante et tend vers 0 en $+\infty$, elle est strictement négative et f est strictement décroissabnte sur $\mathbb{R}^+$
En $+\infty$

$$f(x) = \frac{x}{e^x-1} = \frac{x}{e^x\,(1-1/e^x)} \to 0 \quad \text{car} \quad x \ll e^x$$

d) D'où la courbe représentative : on place la tangente en 0, l'asymptote à l'infini et la concavité.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

a) D'après les variations f on a $\forall x \in [0;+\infty[, \quad 0 \leq f(x) \leq 1$
D'après les variations de f', on a pour tout $x \in [0;+\infty[, \quad -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$ et comme $|f'(x)| = \frac{-1}{2} f'(x)$

$$\forall x \in [0;+\infty[, \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leq f(x) \leq 1$$

b) On procède par équivalence pour résoudre l'équation : 0 n'est pas solution et pour $x \neq 0$

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{x}{e^x-1} = x \\ &\Leftrightarrow 1 = e^x - 1 \quad \text{car } x \neq 0 \text{ et } e^x - 1 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow 2 = e^x \\ &\Leftrightarrow x = \ln(2) \;\; \text{car} \;\; \exp \;\; \text{est strictement croissante sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$

donc $\ln(2)$ est l'unique solution de cette équation.

c) On applique alors l'inégalité des accroissments finis :
On montre tout d'abord que pour tout entier n, $u_n \in [0+\infty[$
Pour $n = 0, \quad u_0 = 0 \in [0+\infty[$
Soit $n \geq 0$ tel que $u_n \in [0+\infty[$ alors, comme $f \geq 0$ sur $[0+\infty[, \quad f(u_n) \geq 0$ et $u_{n+1} \in [0+\infty[$.
Donc pour tout entier n, $u_n \in [0+\infty[$
De plus $\ln(2) \in [0+\infty[$
Et $|f'| \leq \frac{1}{2}$ sur $[0+\infty[$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \ln 2| = |f(u_n) - f(\ln 2)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln 2|$$

d) On a alors par récurrence, pour tout entier $n, 0 \leq |u_n - \ln(2)| \leq 1/2^n$
Et par encadrement $u_n - \ln(2) \longrightarrow 0$ et $u_n \longrightarrow \ln(2)$

(EML 2001)