Corrigé par Pierre Veuillez

1. **a)** $\ln(1+\frac{1}{k}) = \ln(\frac{k+1}{k}) = \ln(1+k) - \ln(k)$. Donc $a = -1$ et $b = 1$ conviennent.

b) Donc

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} \ln(1+\frac{1}{k}) = \sum_{k=2}^{n} \ln(1+k) - \ln(k) = \sum_{k=2}^{n} \ln(1+k) - \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \\ &= \sum_{i=3}^{n+1} \ln(i) - \sum_{k=2}^{n} \ln(k) \text{ (on réindexe par } i = k+1, \text{ les indices de 3 à n sont communs)} \\ &= \sum_{i=3}^{n} \ln(i) + \ln(n+1) - \sum_{k=3}^{n} \ln(k) - \ln(2) = \ln(\frac{n+1}{2}). \end{aligned}$$

2. **a)** Soit $g(x) = x - \ln(1+x)$. g est dérivable en x tel que $1+x > 0$ i.e. sur $]-1, +\infty[$.

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0 \text{ sur }]0, +\infty]$$

Or $g(0) = 0$ donc $g(x) \geq 0$ sur $[0, +\infty[$. Finalement $x - \ln(1+x) \geq 0$ et $ln(1+x) \leq x$ sur $[0, +\infty[$.

b) Comme pôur tout $k \geq 2, 1/k > 0$ alors $\ln(1+\frac{1}{k}) \leq \frac{1}{k}$ et $\sum_{k=2}^{n} \ln(1+\frac{1}{k}) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$. Donc pour tout $n \geq 2, S_n \leq T_n$. Or $S_n = \ln(\frac{n+1}{2}) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$. Donc par minoration, $T_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.

c) Et comme $T_n \geq \ln(\frac{n+1}{2})$, quand $\ln(\frac{n+1}{2}) > 100$ alors $T_n > 100$.
En prenant pour n la partie entière de $2.e^{100}$on aura cette inégalité.