Corrigé EDHEC 2001 par Pierre Veuillez

1. a) Partie 1

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [k, k+1]$ on a : $0 < k \leq t \leq k+1$ donc $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$ et comme les bornes : $k \leq k+1$

   alors Montrer que : , $\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$

   Conclusion : $\boxed{\frac{1}{k+1} \leqslant \int\limits_k^{k+1} \frac{dt}{t}.}$

3. L'inégalité n'est vraie que pour $k \geq 1$ et donc $\frac{1}{k} \leq \int\limits_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$ pour tout $k \geq 2$.

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \text{ pour avoir } k > 1 \\ &\leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} = \int_{1}^{n} \frac{dt}{t} = \ln(n) + 1 \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leqslant \ln(n) + 1.}$

Partie 2

1. Par récurrence on doit d'abord montrer que u_n est définie avant de regrarder son signe :

   a)
   - Pour $n = 0$ est-ce que u_0 est défini et strictement positif ? Oui car $u_0 = 1$
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n défini et strictement positif.
     Alors $u_n + \dfrac{1}{u_n}$ est bien défini car $u_n \neq 0$ et est strictement positif.
   - Donc par récurrence, chaque terme de cette suite est parfaitement défini et strictement positif.

   b) On a donc pour tout entier n : $u_{n+1} > u_n$ car $1/u_n > 0$, et la suite u est donc croissante.

2. a) O na

$$u_{k+1}^2 - u_k^2 = \left(u_k + \frac{1}{u_k}\right)^2 - u_k^2 = u_k^2 + 2 + \frac{1}{u_k^2} - u_k^2 = 2 + \frac{1}{u_k^2}$$

   b) Par récurrence :

   - Est-ce que, pour $n = 1$, $u_1^2 = 2 \cdot 1 + 1 + \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{u_k^2}$?

     Or $\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{u_k^2} = \frac{1}{u_0^2} = 1$ et $u_1^2 = 2^2 = 4$ donc oui !

   - Soit $n \geq 1$ tel que $u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$.

     Est-ce que $u_{n+1}^2 = 2(n+1) + 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k^2}$?

Or $u_{n+1}^2 = u_n^2 + 2 + \dfrac{1}{u_n^2} = 2n + 1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{u_k^2} + 2 + \dfrac{1}{u_n^2}. = 2(n+1) + 1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{u_k^2}$

- Donc la formule est vraie pour tout entier $n \geq 1$

Variante : en voyant la somme telescopique :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1}^2 - u_k^2 &= u_n^2 - 1 \text{ d'une part et d'autre part} \\ \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1}^2 - u_k^2 &= \sum_{k=1}^{n-1} 2 + \frac{1}{u_k^2} = 2(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}\end{aligned}$$

donc $u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$

c) Or $1/u_k^2 \geq 0$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k^2} \geq 0$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^2 \geq 2n + 1.$

Finalement, comme $2n+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, par minoration $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $u_n = |u_n| = \sqrt{u_n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

3. a) On veut majorer $u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$ et pour cela, minorer $\frac{1}{u_k^2}$:

Pour tout n : $u_n^2 \geq 2n + 1 > 2n$ donc $\dfrac{1}{u_n^2} \leq \dfrac{1}{2n}$ si $n > 0$ (si $n \geq 1$) le terme pour $n = 0$ est donc à garder à part.

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} = \frac{1}{1^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} v_{n-1}$ si $n - 1 \geq 1$ i.e. $n \geq 2$

D'où

$$u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \leq 2n + 1 + 1 + \frac{1}{2} v_{n-1}$$

Conclusion : $\boxed{u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2} v_{n-1} \text{ pour tout } n \geq 2}$

b) Et comme $v_n \leq 1 + \ln(n)$ pour tout entier $n \geq 2$ on a donc $v_{n-1} \leq 1 + \ln(n-1)$

$$u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1 + \ln(n-1)}{2} = 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}.$$

c) On a alors l'encadrement :

$$2n + 1 \leq u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}$$

et comme la fonction $\sqrt{}$ est strictmeent croissante sur $[0, +\infty[$ et qu'ils en sont éléments :

$$\begin{aligned}\sqrt{2n+1} &\leq u_n \leq \sqrt{2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}} \text{ donc} \\ \sqrt{2n}\sqrt{1 + 1/2n} &\leq u_n \leq \sqrt{2n}\sqrt{1 + \frac{5}{4n} + \frac{\ln(n-1)}{4n}} \text{ et} \\ \sqrt{1 + \frac{1}{2n}} &\leq \frac{u_n}{\sqrt{2n}} \leq \sqrt{1 + \frac{5}{4n} + \frac{\ln(n-1)}{4n}}\end{aligned}$$

et par encadrement $u_n/\sqrt{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $u_n \sim \sqrt{2n}$ quand $n \to +\infty$.

Partie 3

1. On a $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$ pour tout $n \geq 0$

   On affecte la valeur u_n à `u`. On calcule les termes de u_1 à u_n (`for k:=1 to n`)

```
Program suite;
var n,k:integer; u:real;
begin
    u:=1;
    writeln('valeur de n ?'); readln(n);
    for k:=1 to n do u:=u+1/u;
    writeln(u);
end.
```

2. a) Ecrire un deuxième programme, toujours en Turbo Pascal, qui permette de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \geqslant 100$:

   On calcue u_n et n tant que $u_n < 100$ (ou jusqu'à ce que $u_n \geq 100$, mais cela demande de vérifier que le premier terme ne vérifie pas la condition)
   On n'oublie pas d'intialiser n.

```
Program suite;
var n :integer; u:real;
begin
u:=1;n:=0;
while u<100 do
    begin n:=n+1 ; u:=u+1/u; end;
writeln(n);
end.
```

   b) On donne $ln2 < 0,70$ et $ln5 < 1,61$.
   On a $5000 = 5 \cdot (5 \cdot 2)^3 = 5^4 2^3$ donc $\ln(5000) = 4\ln(5) + 3\ln(2) < 4 \cdot 1,61 + 3 \cdot 0,70 = 8,54$
   Conclusion : $\boxed{\ln 5000 < 8,54}$

   c) Montrer que l'entier n trouvé en 2a) est compris entre 4995 et 5000.
   Pour que n soit le plus petit entier vérifiant $u_n \geq 100$, il faut et suffit que $u_n \geqslant 100$ et $u_{n-1} < 100$
   Or on a vu que $2n + 1 \leq u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}$

   - Pour $n = 4994$ on a $\ln(n-1) < \ln(5000)$ donc $2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2} \leq 9988 + 2.5 + 8.54 < 10000$ donc $(u_{4994})^2 < 10000$ et $u_{4994} < 1000$
     Donc la valeur recherchée est strictement supérieure à 4994
   - Pur $n = 5000$ on a $2n + 1 = 10001 > 10000$ donc $u_{5000}^2 > 10000$ et $u_{5000} > 100$
     Donc la valeur recherchée est inférieure ou égale à 5000.

   Conclusion : $\boxed{n \text{ est compris entre } 4995 \text{ et } 5000}$

(EDHEC 2001)