Corrigé EDHEC 1997 par Pierre Veuillez

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = 1/C_{n+p}^n$,où p désigne un entier naturel fixé.

1. Si $p = 0$ on a $u_n = 1/C_n^n = 1$ donc la série diverge (Condition nécessaire de convergence : le treme général doit tendre vers 0)

   Si $p = 0$ on a $u_n = 1/C_{n+1}^n = 1/C_{n+1}^1 = 1/(n+1) \sim 1/n$ dont la série (de Rieman) diverge

   Donc par comparaison de dsérires à termes positifs, la série des u_n diverge également.

On suppose dans toute la suite que p est supérieur ou égal à 2 et on pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$

2. a) Comme $0 \leq n \leq n+p$ on a $\begin{pmatrix} n+p \\ n \end{pmatrix} = \frac{(n+p)!}{n!p!}$

$$(n+p+2)\,u_{n+2} = \frac{n+p+2}{\frac{(n+p+2)!}{n!(p+2)!}} = \frac{n!\,(p+1)!\,(p+2)\,(n+p+2)}{(n+p+1)!\,(n+p+2)}$$

car $n+p+1 \geq 0$ et $p+1 \geq 0$. Donc

$$\begin{aligned}(n+p+2)\,u_{n+2} &= (p+2)\,\frac{n!\,(p+1)!}{(n+p+1)!} \\ &= (n+2)\,u_{n+1}\end{aligned}$$

b) Pa rrécirrence :

- Pour $n = 1$ on a $S_1 = \sum_{k=1}^1 u_k = u_1 = 1/\begin{pmatrix} 1+p \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+p}$

  et $u_2 = 1/\begin{pmatrix} 2+p \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{(2+p)(1+p)}$ donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{p-1}\left(1-(1+p+1)\,u_{1+1}\right) &= \frac{1}{p-1}\left(1-(p+2)\,\frac{2}{(2+p)\,(1+p)}\right) \\ &= \frac{1}{p-1}\,\frac{p-1}{1+p} = \frac{1}{1+p} = S_1\end{aligned}$$

- Soit $n \geq 1$ tel que $S_n = \frac{1}{p-1}(1-(n+p+1)\,u_{n+1})$ alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{p-1}\left(1-(n+1+p+1)\,u_{n+2}\right) &= \frac{1}{p-1}\left(1-(n+p+2)\,u_{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{p-1}\left(1-(n+2)\,u_{n+1}\right)\end{aligned}$$

  D'aute part

$$\begin{aligned}S_{n+1} &= S_n + u_{n+1} \\ &= \frac{1}{p-1}\left(1-(n+p+1)\,u_{n+1}\right) + u_{n+1} \\ &= \frac{1}{p-1}\left(1-(n+p+1)\,u_{n+1} + (p-1)\,u_{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{p-1}\left(1-(n+2)\,u_{n+1}\right)\end{aligned}$$

  d'où l'égalité.

- Donc pour tout entier $n \geq 1$: $S_n = \frac{1}{p-1}(1-(n+p+1)\,u_{n+1})$

3. a) On calcule la différence

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{n+p+1}{\begin{pmatrix} n+1+p \\ n+1 \end{pmatrix}} - \frac{n+p}{\begin{pmatrix} n+p \\ n \end{pmatrix}} \\ &= \frac{(n+p+1)\,(n+1)!p!}{(n+p+1)!} - \frac{(n+p)\,n!p!}{(n+p)!} \\ &= \frac{p!n!}{(n+p)!}\,[n+1-(n+p)] \\ &= \frac{p!n!}{(n+p)!}\,(1-p) < 0 \end{aligned}$$

donc la suite (v_n) est décroissante.

b) Comme c'est une suite de termes positif, elle est décroissante et minorée par 0
Donc convergente vers une limite $\ell \geq 0$

c) Comme $(n+p)\,u_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$ alors $(n+p+1)\,u_{n+1} \to \ell$ et $S_n = \frac{1}{p-1}(1-(n+p+1)\,u_{n+1}) -$
Donc la série de terme général (u_n) converge et sa somme est $\dfrac{1-\ell}{1-p}$

4. On suppose dans cette question seulement que $\ell \neq 0$. (celà permet de diviser par ℓ/n)

a) On calcule la limite du quotient en faisant apparaitre la quantité connue $(n+p)\,u_n$

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{\ell/n} &= \frac{(n+p)\,u_n}{\ell}\frac{n}{n+p} \\ &= \frac{(n+p)\,u_n}{\ell}\frac{1}{1\,(1+p/n)} \end{aligned}$$

$\to 1$ quand $n \to +\infty$

Donc, au voisinage de $+\infty$, $u_n \sim \dfrac{\ell}{n}$

b) Comme la série de terme général ℓ/n (de Rieman) est divergente, par coparaison de séries à termes positif, la série des u_n diverge également.
Ce qui est faux.

5. Donc ℓ ne peut pas être non nul. Donc $\ell = 0$
Et donc, la série de terme général u_n a pour somme $1/\,(1-p)$