Corrigé EDHEC 2003 par Pierre Veuillez

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. Soit f_n la fonction définie par : $f_n(x) = \begin{cases} nx^{n-1} & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   f_n est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$ (en fait, en 0 elle est continue)

   $\int_{-\infty}^{+\infty} f\ _n$est impropre en $\pm\infty$ car f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$

   $\int_{-\infty}^{0} f_n = \int_{-\infty}^{0} 0$ converge et est nulle.

   $\int_{1}^{+\infty} f_n = \int_{1}^{+\infty} 0 = 0$

   $\int_0^1 f_n = \int_0^1 nx^{n-1}dx = [x^n]_{x=0}^1 = 1$ car $0^n = 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

   Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n$ converge et vaut 1.

   Donc f_n est bien une densité de probabilité.

2. On considère une variable aléatoire X_n réelle dont une densité de probabilité est f_n. On dit alors que X_n suit une loi monôme d'ordre n.

   a) Pour $n = 1$ la densité est : $f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ donc X_1 suit une loi uniforme sur $[0,1]$

   b) La fonction de réparition de X_n est donnée par :
   $F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f$ où il faut distinguer suivant que $x < 0 : 0 \le x \le 1$ et $x > 1$:
   - si $x < 1$ alors $F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 = 0$
   - si $0 \le x \le 1$ alors $F_n(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_0^x nt^{n-1}dt = 0 + [t^n]_0^x = x^n$
   - si $1 < x$ alors $F_n(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_0^1 nt^{n-1}dt + \int_1^x 0 = 0 + [t^n]_0^1 + 0 = 1$

   Pour calculer $E(X_n)$ on étudie la convergence et on calcule $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t)\,dt$ qui est impropre en $\pm\infty$

   $\int_{-\infty}^{0} t\, f_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0 = .0$

   $\int_{1}^{+\infty} t\, f_n(t)\,dt = \int_{1}^{+\infty} 0 = 0$

   $$\int_0^1 t\, f_n(t)\,dt = \int_0^1 t\, nt^{n-1}dt = \int_0^1 nt^n dt = \left[\frac{n}{n+1}t^{n+1}\right]_{t=0}^1 = \frac{n}{n+1}$$

   Donc X_n a une espérance et $\boxed{E(X_n) = \dfrac{n}{n+1}}$

   De même pour $E\left(X_n^2\right) = \displaystyle\int_0^1 t^2 f_n(t)\,dt = \int_0^1 nt^{n+1}dt = \left[\frac{n}{n+2}t^{n+2}\right]_0^1 = \frac{n}{n+2}$

   Donc X a une variance et

   $$\begin{aligned} V(X_n) &= E\left(X_n^2\right) - E\left(X_n^2\right) = \frac{n}{n+2} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \\ &= n\frac{n^2+2n+1-n(n+2)}{(n+2)(n+1)^2} \\ &= \frac{n}{(n+2)(n+1)^2} \end{aligned}$$

3. On considère deux variables aléatoires U_n et V_n définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la loi monôme d'ordre n $(n \geqslant 2)$ et indépendantes, c'est-à-dire qu'elles vérifient en particulier l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P\left(U_n \leqslant x \cap V_n \leqslant x\right) = P\left(U_n \leqslant x\right) P\left(V_n \leqslant x\right)$$

On pose $M_n = \sup\left(U_n, V_n\right)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) $(M_n \leqslant x)$ est l'événement "le plus grand es tplus petit que x" c'est à dire "tous sont plus petit que x"
et $(M_n \leqslant x) = (U_n \leqslant x) \cap (V_n \leqslant x)$

b) Comme U_n et V_n sont indépendantes, on a alors : $p\left(M_n \leqslant x\right) = p\left(U_n \leqslant x\right) \cdot p\left(V_n \leqslant x\right)$
En notant F la fonction de répartition d'une loi monôme et G celle de M_n on a alors :
$G(x) = F(x) \cdot F(x) = F(x)^2$ pour tout x réel.
Comme F est la fonctio de répartition d'une variable à densité, on sait

- que F est continue sur $\mathbb{R}$
- de classe C^1 sur $\mathbb{R}- \{0, 1\}$ (là où f_n est continue)
- et que $F' = f_n$

Donc

- que G est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues.
- G de classe C^1 sur $\mathbb{R}- \{0, 1\}$
- et que $G' = 2F(x) F'(x) = 2F(x) f_n(x) = \begin{cases} 2x^n n x^{n-1} = 2nx^{2n-1} & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Donc M_n est une variable à densité et suit une loi monôme d'ordre $2n$
et donc $\boxed{E\left(M_n\right) = \dfrac{2n}{2n+1}}$

c) On pose $T_n = \inf\left(U_n, V_n\right)$.
On a $M_n + T_n = U_n + V_n$ (car l'un est le plus petit et l'auter le plus grand)
De plus $E\left(U_n\right) = E\left(V_n\right) = \dfrac{n}{n+1}$ alors $E\left(U_n + V_n\right) = E\left(U_n\right) + E\left(V_n\right) = \dfrac{2n}{n+1}$
Et comme $T_n = M_n + T_n - M_n = U_n + V_n - M_n$ on a finalement

$$\begin{aligned} E\left(T_n\right) &= E\left(U_n + V_n\right) - E\left(M_n\right) \\ &= \frac{2n}{n+1} - \frac{2n}{2n+1} \\ &= \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} \end{aligned}$$

(EDHEC 2003)